Exercice

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.

On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.

Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?

Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Ainsi, pour tout réel *t* positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à *t* années, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par : $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \, dx$.

1. Déterminer λ sachant que $p(X > 5) = 0{,}4$.

2. Dans cette question, on prendra $\lambda = 0{,}18$.

Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X>5)=0{,}4$.

a. On considère un lot de 10 ordinateurs.

Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.

b. Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'événement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999 ?

Correction :

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On différencie les 25 ordinateurs (en leur mettant un numéro par exemple).

On choisit au hasard 2 ordinateurs, une éventualité est une combinaison de 2 éléments d'un ensemble de 25 éléments et la loi est équirépartie.

$$Card\,\Omega=\binom{25}{2}=\frac{25!}{2!23!}=300$$

Pour obtenir 2 ordinateurs défectueux, il faut **choisir 2 ordinateurs parmi les 3 défectueux** donc il y a $\binom{3}{2}=3$ possibilités et **la probabilité d'obtenir deux ordinateurs défectueux** est : $\boxed{\frac{3}{300}=\frac{1}{100}=0{,}01}$.

Partie B

1.

$p(X>5)=0{,}4$

$\Leftrightarrow\ 1-p(X\leqslant 5)=0{,}4$

$\Leftrightarrow\ p(X\leqslant 5)=0{,}6$

$\Leftrightarrow\ \int_0^5 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=0{,}6$

$\Leftrightarrow\ \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^5=0{,}6$

$\Leftrightarrow\ -e^{-5\lambda}+1=0{,}6$

$\Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{-5\lambda}=0{,}4$

$\Leftrightarrow\ -5\lambda=\ln 0{,}4$

$\Leftrightarrow\ \boxed{\lambda=\frac{\ln 4}{-5}\approx 0{,}183}$

2.

$$P_{[3;+\infty[}([5;+\infty[)=\frac{p([5;+\infty[)}{p([3;+\infty[)}=\frac{1-\int_0^5 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x}{1-\int_0^3 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x}=\frac{e^{-5\times 0{,}18}}{e^{-3\times 0{,}18}}=e^{-2\times 0{,}18}=e^{-0{,}36}\approx 0{,}698$$

3. a.

Soit **l'épreuve de Bernoulli** pour un ordinateur :

S: **l'ordinateur a une durée de vie supérieure à 5** : $\boxed{p(S)=p(X>5)=0{,}4}$

On suppose que les durées de vie des 10 ordinateurs sont indépendantes.

On obtient **un schéma de Bernoulli** de 10 épreuves et de paramètre 0,4.

La **loi de probabilité** de la variable aléatoire Y égale **au nombre de succès** en 10 épreuves est **la loi binomiale** de paramètres $\boxed{10}$ et $\boxed{0{,}4}$.

L'événement contraire à l'événement considéré est $Y=0$.

$p(Y=0)=0{,}6^{10}\approx 0{,}006$

Donc, **la probabilité** que l'un des ordinateurs ait **une durée de vie supérieure à 5 ans** est $\boxed{1-0{,}006=0{,}994}$ à 10^{-3} près.

b. Pour n ordinateurs :

$1-(0{,}6)^n\geqslant 0{,}999$

$\Leftrightarrow\ 0{,}6^n\leqslant 0{,}001$

$\Leftrightarrow\ n\ln 6\leqslant \ln 0{,}001$

$\Leftrightarrow\ n\geqslant \dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}6}\approx 13{,}5$

Le nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'événement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999 est **14**.