Exercice

Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.
Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.
1. Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.
(a) Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.
(b) Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur ? On donnera la valeur arrondie du résultat à 10^{-3}.
2. Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus.
Quelle est alors la probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut ? On donnera la valeur arrondie à 10^{-3}.
3. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaison.
On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre λ .

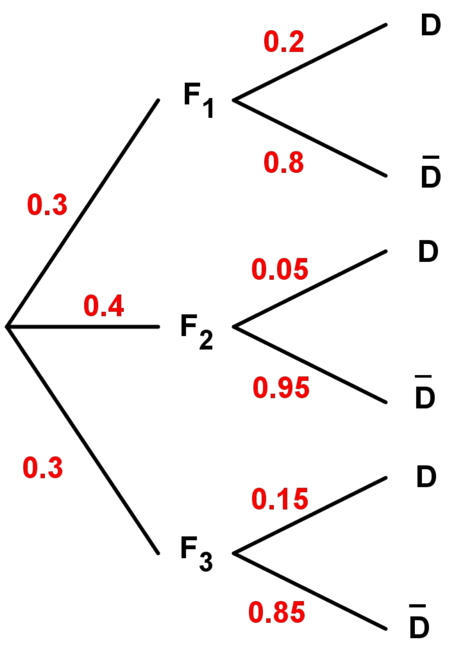
On rappelle que, pour tout nombre réel k positif : $P(X \leq k)=\int_0^k \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x$

(a) Montrer que $P(500 \leqslant X \leqslant 1000)=\mathrm{e}^{-500\lambda}-e^{-1000\lambda}$.
(b) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse,sera prise en compte dans l'évaluation.*

La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1 000 kilomètres sans crevaison étant égale à $\frac{1}{4}$, déterminer la valeur arrondie à 10^{-4} du paramètre λ .

Correction :

1. (a)



D'après la formule des probabilités totales :
$\boxed{P(\overline{D})=0{,}3\times0{,}8+0{,}4\times0{,}95+0{,}3\times0{,}85=0{,}24+0{,}38+0{,}255=0{,}875}$

(b) $\boxed{P_{\overline{D}}(F_2)=\dfrac{P(F_2\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\dfrac{0{,}4\times0{,}95}{0{,}875}=\dfrac{380}{875}=\dfrac{76}{175}\approx0{,}434}$

2. On a une épreuve de Bernoulli pour un pneu.
Succès S : le pneu ne présente pas de défaut: $\boxed{P(S)=0{,}875}$
Échec $\overline{S}$: le pneu présente un défaut: $\boxed{P(\overline{S})=0{,}125}$
On obtient un schéma de Bernoulli de 10 épreuves.
La loi de probabilité de la variable Y égale au nombre de succès en 10 épreuves est la loi binomiale de paramètres $\boxed{10}$ et $\boxed{0{,}875}$.

$$P(Y=10)=\binom{10}{10}0{,}875^{10}\times0{,}125^{0}\approx0{,}263$$
$$P(Y=9)=\binom{10}{9}0{,}875^{9}\times0{,}125^{1}\approx0{,}376$$
$$\boxed{P\approx0{,}263+0{,}375\approx0{,}639}$$

3. (a) $\boxed{P(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \int_{500}^{100} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{500}^{1000} = \mathrm{e}^{-500\lambda} - \mathrm{e}^{-1000\lambda}}$

(b)

$$P(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \mathrm{e}^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Y} = \mathrm{e}^{-500\lambda} \\ \mathrm{Y} - \mathrm{Y}^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$Y^2 - Y + \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(Y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

donc $Y = \dfrac{1}{2}$

$$\mathrm{e}^{-500\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$-500\lambda = \ln\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{-\ln 2}{-500} = \frac{\ln 2}{500} \approx 0{,}0014}$$