Exercice

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où X est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \, dx$

La fonction R définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Restitution organisée de connaissances

a. Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = e^{-\lambda t}$.

b. Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t+s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.

2. Dans cette question, on prend λ =0,00026.

a. Calculer $P(X \leqslant 1000)$ et $P(X > 1000)$.

b. Sachant que l'événement $(X > 1000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'événement $(X > 2000)$.

c. Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2 000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3 000 heures ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Correction :

1. Restitution organisée de connaissances

a.

$$P(X\leq t)=\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

$$\boxed{R(t)=P(X>t)=1-P(X\leqslant t)=1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})=\mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

b. $P_{X>t}(X>t+s)=\dfrac{P(X>t+s)}{P(X>t)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}=\mathrm{e}^{-\lambda s}=R(s)$

Donc, $\boxed{P_{X>t}(X>t+s)}$ **ne dépend pas** du nombre $\boxed{t\geqslant 0}$.

2. a. $\boxed{P(X>1000)=\mathrm{e}^{-\lambda\times 1000}=\mathrm{e}^{-0,26}\approx 0,771}$ à 10^{-3} près.

$\boxed{P(X\leqslant 1000)=1-P(X>1000)=1-\mathrm{e}^{-0,26}\approx 0,229}$ à 10^{-3} près.

b. $\boxed{P_{X>1000}(X>2000)=\dfrac{P(X>2000)}{P(X>1000)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-2000\lambda}}{\mathrm{e}^{-1000\lambda}}=\mathrm{e}^{-1000\lambda}=P(X>1000)\approx 0,771}$ à 10^{-3} près.

c. Puisque c'est **une loi de durée de vie sans vieillissement**, la probabilité que l'agenda tombe en panne avant 3000 heures sachant qu'il a fonctionné plus de 2000 est $\boxed{P(X>1000)=\mathrm{e}^{-0,26}\approx 0,771}$ à 10^{-3} près.