# Probabilités conditionnelles

1. Notions de probabilités conditionnelles..... p2
2. Probabilités conditionnelles..... p5
3. Formule des probabilités totales..... p6
4. Théorème..... p7
5. Généralisation..... p7

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

# 1. Notions de probabilités conditionnelles

## 1.1. Exemple 1

a) On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

Card Ω=32

Il y a 32 éventualités que l'on peut noter :

$7_t ; 8_t ; 9_t ; 10_t ; V_t ; D_t ; R_t ; A_t$ les 8 trèfles ; $7_p$ ;... $A_p$ les 8 piques ; $7_c$ ;... ; $A_c$ les 8 cœur, $7_{ca}$ ;... ; $A_{ca}$ les 8 carreaux.

Le tirage est effectué au hasard donc la loi est équirépartie.

Soit R l'événement : on tire un roi. $P(R)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$

Soit T l'événement : on tire un trèfle. $P(T)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$

R∩T=$\{R_t\}$. $P(R\cap T)=\frac{1}{32}$

b) On arrive maintenant à savoir avant de découvrir la carte qu'il s'agit d'un trèfle.

On note (*R/T*) l'événement : tirer un roi **sachant** que l'on a tiré un trèfle.

$P(R/T)=\frac{1}{8}$

On peut remarquer que $\frac{P(R\cap T)}{P(T)}=\frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}=P(R/T)$

c) On arrive maintenant à savoir avant de découvrir la carte qu'il s'agit d'un roi.

On note (*T/R*) l'événement : tirer un trèfle **sachant** que l'on a tiré un roi.

$P(T/R)=\frac{1}{4}$

On peut remarquer que $\frac{P(T\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{8}}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}=P(T/R)$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

### 1.2. Exemple 2

Dans une urne, on dispose 7 boules rouges, 4 boules noires et 2 boules vertes. On tire successivement et au hasard deux boules de l'urne sans remise.

En différenciant les 13 boules par exemple : $r_1;r_2;r_3;r_4;r_5;r_6;r_7;n_8;n_9;n_{10};n_{11};v_{12};v_{13}$ , une éventualité est alors une 2-liste d'éléments deux à deux distincts d'un ensemble de 13 éléments, donc :

Card $\Omega = \frac{13!}{(13-2)!} = 12\times 13 = 156$

Les tirages sont effectués au hasard donc la loi est équirépartie.

Pour $i$ égal 1 ou 2, on note :

$R_i$ l'événement : tirer une boule rouge au $i^{ème}$ tirage.

$N_i$ l'événement : tirer une boule noire au $i^{ème}$ tirage.

$V_i$ l'événement : tirer une boule verte au $i^{ème}$ tirage.

$R_1$ : il faut tirer au premier tirage une boule rouge parmi les 7 boules rouges et au deuxième tirage une boule parmi les 12 restantes.

Card $R_1 = 7\times 12$

$$P(R_1) = \frac{7\times 12}{12\times 13} = \frac{7}{13}$$

(On obtient la probabilité d'obtenir une boule rouge avec un seul tirage).

Même raisonnement pour $N_1$ et $V_1$ .

Card $R_1 = 7\times 12$

$$P(R_1) = \frac{7\times 12}{12\times 13} = \frac{7}{13}$$

Card $N_1 = 4\times 12$

$$P(R_1) = \frac{4\times 12}{12\times 13} = \frac{4}{13}$$

Card $V_1 = 2\times 12$

$$P(V_1) = \frac{2\times 12}{12\times 13} = \frac{2}{13}$$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Ce raisonnement ne permet pas de calculer $R_2$ ou $N_2$ ou $V_2$.

$V_1 \cap R_2$ : il faut tirer au premier tirage une boule verte parmi les 2 boules vertes et au deuxième tirage une boule rouge parmi les 7 boules rouges.

Card $V_1 \cap R_2 = 2 \times 7$

$$P(V_1 \cap R_2) = \frac{14}{12 \times 13} = \frac{7}{78}$$

De même,

Card $N_1 \cap R_2 = 4 \times 7$

$$P(N_1 \cap R_2) = \frac{28}{12 \times 13} = \frac{7}{39}$$

$R_1 \cap R_2$ : il faut tirer au premier tirage une boule rouge parmi les 7 boules rouges et au deuxième tirage une boule rouge parmi les 6 boules rouges restantes dans l'urne.

Card $R_1 \cap R_2 = 7 \times 6$

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{42}{12 \times 13} = \frac{7}{26}$$

$V_1 \cap R_2 \cup N_1 \cap R_2 \cup R_1 \cap R_2$ : au premier tirage, on obtient une boule quelconque parmi les 13 de l'urne et au deuxième tirage, on obtient une boule rouge, donc :

$V_1 \cap R_2 \cup N_1 \cap R_2 \cup R_1 \cap R_2 = R_2$

Les événements $V_1 \cap R_2$ ; $N_1 \cap R_2$ et $R_1 \cap R_2$ sont incompatibles deux à deux, donc :

$$P(R_2) = P(V_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap R_2) = \frac{7}{78} + \frac{7}{39} + \frac{7}{26} = \frac{7}{13}$$

(on remarque que la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est égale à la probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage)

$P(R_2 / N_1)$ est la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage **sachant** que l'on a tiré une boule noire au premier tirage.

Pour le deuxième tirage dans l'urne, on a 12 boules dont 7 rouges.

$$P(R_2 / N_1) = \frac{7}{12}$$

De même, $P(R_2 / V_1) = \frac{7}{12}$ et $P(R_2 / R_1) = \frac{6}{12}$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

On peut remarquer que :

$$\frac{P(N_1 \cap R_2)}{P(N_1)} = \frac{\frac{7}{39}}{\frac{4}{13}} = \frac{7}{12} = P(R_2/N_1)$$

$$\frac{P(V_1 \cap R_2)}{P(V_1)} = \frac{\frac{7}{78}}{\frac{2}{13}} = \frac{7}{12} = P(R_2/V_1)$$

$$\frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1)} = \frac{\frac{7}{26}}{\frac{7}{13}} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2} = P(R_2/R_1)$$

On peut aussi remarquer que :

$$P(R_2/N_1) \times P(N_1) + P(R_2/V_1) \times P(V_1) + P(R_2/R_1) \times P(R_1)$$

$$= \frac{7}{12} \times \frac{4}{13} + \frac{7}{12} \times \frac{2}{13} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{13}$$

$$= \frac{7}{13} = P(R_2)$$

## 2. Probabilités conditionnelles

### 2.1. Définition

P est une probabilité sur Ω.

A et B sont deux événements, la probabilité de B est non nulle.

**La probabilité de A sachant que B** est réalisé (on dit A sachant B) est le nombre noté $P_B(A)$ ou $P(A/B)$ défini par :

$$P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

### 2.2. Probabilité d'une intersection

P est une probabilité sur Ω.

A et B sont deux événements de probabilités non nulles.

$$P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B) = P(A/B) \times P(B)$$

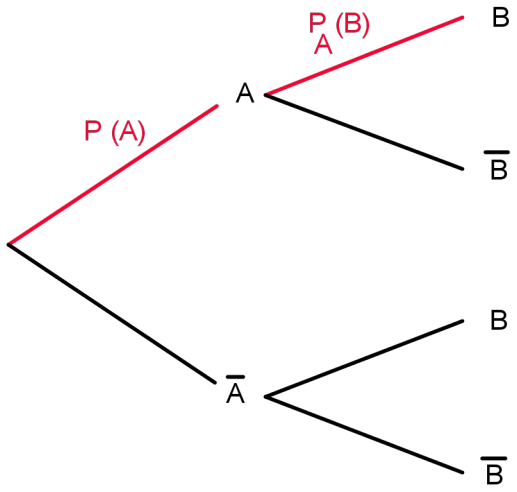
$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P(B/A) \times P(A)$$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Remarque :

$P(A\cap B)=P(B\cap A)$ , mais en général $P(A/B)\neq P(B/A)$

Utilisation d'un arbre pondéré




Le chemin en rouge représente l'événement A∩B.

La probabilité de ce chemin (ou de l'événement A∩B)est le produit des probabilités de ses branches.

## 3. Formules des probabilités totales

### 3.1. Définition

$B_1 ; B_2 et\ B_3$ sont des événements de Ω.

On dit que $B_1 ; B_2 et\ B_3$ forment **une partition** de Ω si et seulement si :

$B_1\neq\emptyset$ et $B_2\neq\emptyset$ et $B_3\neq\emptyset$

$B_1\cap B_2=\emptyset$ et $B_1\cap B_3=\emptyset$ et $B_2\cap B_3=\emptyset$

$B_1\cup B_2\cup B_3=\Omega$

### 3.2. Exemple

Dans l'exemple 2 du premier paragraphe, $N_1$ ; $V_1$ et $R_1$ forment une partition de Ω.

### 3.3. Généralisation

$n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$B_1 ; B_2 ; \ldots ; B_n$ sont $n$ événements de Ω.

On dit que $B_1 ; B_2 ; \ldots ; B_n$ forment **une partition** de Ω si et seulement si :

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Pour tout $i \in \{1;2;\ldots;\ldots;n\}$ , $B_i \neq \emptyset$

Pour tout i et j distincts appartenant à $\{1;2;\ldots;n\}$, on a $B_i \cap B_j = \emptyset$

$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$

## 4. Théorème

Formules de probabilités totales :

Si $B_1 ; B_2$ *et* $B_3$ forment une partition de Ω et si A est un événement de Ω alors :

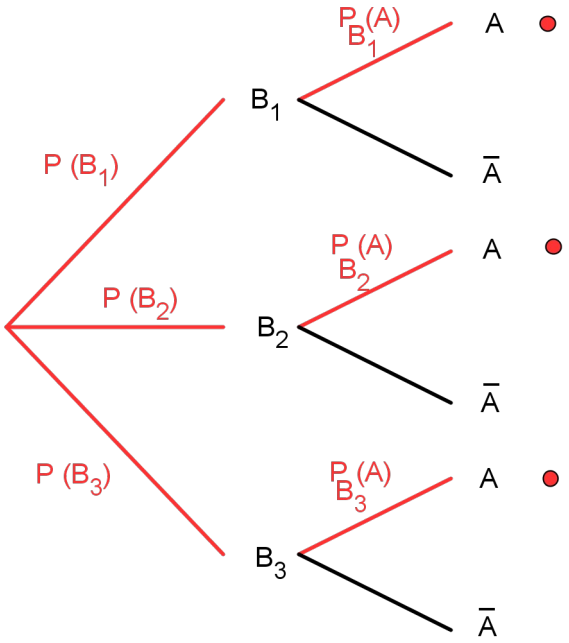
$$P(A) = P(A/B_1) \times P(B_1) + P(A/B_2) \times P(B_2) + P(A/B_3) \times P(B_3)$$

Démonstration :

Il suffit de vérifier que :

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A)$$

Utilisation d'un arbre pondéré :




## 5. Généralisation

Formules de probabilités totales :

Si $B_1 ; B_2 ; \ldots ; B_n$ forment une partition de Ω et si A est un événement de Ω alors :

$$P(A) = P(A/B_1) \times P(B_1) + P(A/B_2) \times P(B_2) + \ldots + P(A/B_n) \times P(B_n)$$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés