Exercice

Une urne U_1 contient deux boules vertes et trois boules rouges indiscernables au toucher.

Une urne U_2 contient cinq boules rouges et trois boules jaunes indiscernables au toucher.

On choisit au hasard l'une des deux urnes puis on tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne.

1. Calculer les probabilités des événements suivants :

E_1 : « on tire deux boules de U_1 »

E_2 : « on tire deux boules de U_2 »

A : « les boules tirées sont rouges»

B : « les boules tirées sont jaunes»

C : « les boules tirées sont de couleurs différentes»

2. Calculer la probabilité de l'événement « les boules tirées sont de U_1 sachant qu'elles sont rouges ».

Correction :

1. Le choix de l'urne s'effectue au hasard donc la loi est équirépartie.

$\boxed{P(E_1)=P(E_2)=\frac{1}{2}}$ (l'univers a deux éventualités).

Pour les tirages (au hasard) des deux boules simultanément les lois sont équiréparties.

Si on extrait les deux boules de U_1, on peut obtenir :

2 boules rouges que l'on note : RR

ou 2 boules vertes que l'on note : VV

ou 1 boule rouge et une boule verte que l'on note RV

Si on extrait les deux boules de U_2, on peut obtenir :

2 boules rouges que l'on note : RR

ou 2 boules jaunes que l'on note : JJ

ou 1 boule rouge et une boule jaune que l'on note RJ

On décrit l'expérience en utilisant un arbre pondéré.

Pour cela, on calcule les probabilités des différentes branches.

Dans U_1, il y a 5 boules. Si on tire simultanément 2 boules de U_1, une éventualité est une combinaison de 2 éléments d'un ensemble de 5 éléments. Le cardinal de l'univers est : « 2 parmi 5 ».

$\boxed{\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!3!}=10}$

Le nombre de possibilités de tirer 2 boules rouges dans U_1 est : $\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!1!}=3$, donc $\boxed{P_{E_1}(A)=\frac{3}{10}}$

Le nombre de possibilités de tirer 2 boules vertes dans U_1 est : $\binom{2}{2}=1$, donc $\boxed{P_{E_1}(VV)=\frac{1}{10}}$

Le nombre de possibilités de tirer 1 boule rouge et une verte dans U_1 est : $\binom{3}{1}\times\binom{2}{1}=3\times 2=6$, donc $\boxed{P_{E_1}(RV)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}}$

Dans U_2, il y a 8 boules. Si on tire simultanément 2 boules de U_2, une éventualité est une combinaison de 2 éléments d'un ensemble de 8 éléments. Le cardinal de l'univers est : « 2 parmi 8 ».

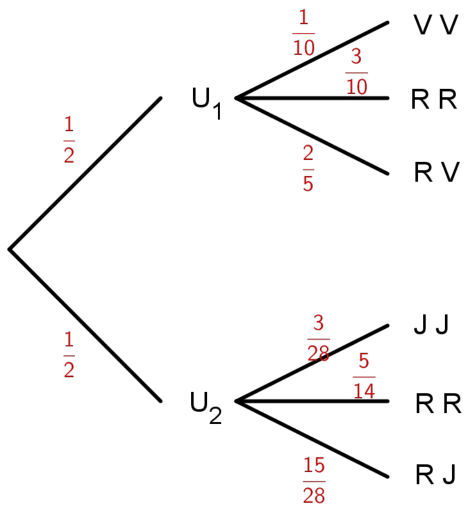
$\boxed{\binom{8}{2}=\frac{8!}{2!6!}=28}$

Le nombre de possibilités de tirer 2 boules rouges dans U_2 est : $\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!3!}=10$, donc $\boxed{P_{E_2}(A)=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}}$

Le nombre de possibilités de tirer 2 boules jaunes dans U_2 est : $\binom{3}{2}=3$, donc $\boxed{P_{E_2}(JJ)=\frac{3}{28}}$

Le nombre de possibilités de tirer 1 boule rouge et une jaune dans U_2 est : $\binom{5}{1}\times\binom{3}{1}=5\times 3=15$, donc $\boxed{P_{E_2}(RJ)=\frac{15}{28}}$

L'arbre pondéré est donc :



E_1 et E_2 forment une partition de Ω .

$P(A)=P_{E_1}(A)\times P(E_1)+P_{E_2}(A)\times P(E_2)$

$P(A)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{5}{14}\times\frac{1}{2}$

$P(A)=\frac{3}{20}+\frac{5}{28}$

$P(A)=\frac{46}{140}$

$\boxed{P(A)=\frac{23}{70}\approx 0{,}329}$

$P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{28}$

$\boxed{P(B)=\frac{3}{56}\approx 0{,}054}$

$P(C)=P_{E_1}(RV)\times P(E_1)+P_{E_2}(RJ)\times P(E_2)$

$P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{15}{28}$

$P(C)=\frac{3}{10}+\frac{15}{56}$

$\boxed{P(C)=\frac{159}{280}\approx 0{,}568}$

2. On demande de calculer $P_A(E_1)$

$P_A(E_1)=\frac{P(A\cap E_1)}{P(A)}$

Or, $P(A\cap E_1)=P_{E_1}(A)\times P(E_1)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$ et $P(A)=\frac{23}{70}$.

Donc, $\boxed{P_A(E_1)=\frac{3}{20}\div\frac{23}{70}=\frac{3}{20}\times\frac{70}{23}=\frac{21}{46}\approx 0{,}4357}$