Exercice

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne U_1 contient 3 boules rouges et 5 boules vertes.

Une urne U_2 contient n boules rouges et 3 boules vertes et 2 boules blanches.

On tire au hasard une boule de U_1 que l'on place dans U_2, puis on tire au hasard et simultanément deux boules de U_2.

Si on tire deux boules rouges de U_2, on gagne 5€.

Si on tire deux boules vertes de U_2, on gagne 2€.

Si on tire 2 boules blanches de U_2, on gagne 1€.

Si on tire deux boules de couleurs différentes de U_2, on perd 2€.

Soit X la variable aléatoire « gain en euros à l'issue d'une telle épreuve »

1. Établir la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique de X et déterminer n pour que le jeu soit le plus équitable possible.
3. Calculer l'écart type de X lorsque n vaut 5.

Correction :

1. On différencie toutes les boules (par exemple on peut mettre un numéro sur toutes les boules des 2 urnes)

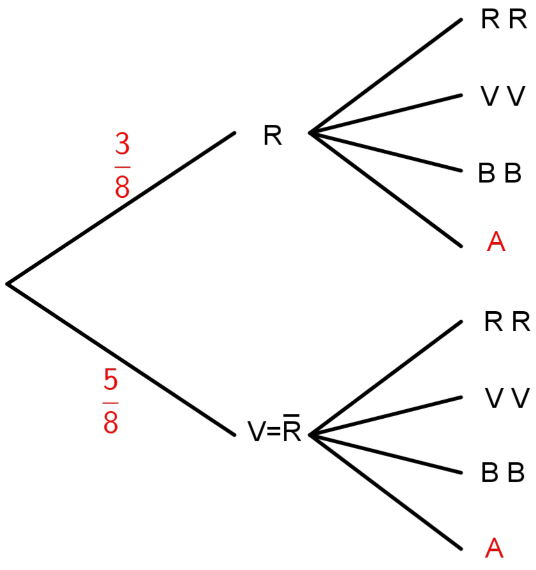
On tire au hasard 1 boule de l'urne U_1 . le cardinal de l'univers est 8 et la loi est équirépartie.

Il y a 3 boules rouges dans l'urne donc le nombre de possibilités de tirer une boule rouge de U_1 est 3 et $\boxed{P(R)=\frac{3}{8}}$.

Il y a 5 boules vertes dans l'urne donc le nombre de possibilités de tirer une boule verte de U_1 est 5 et $\boxed{P(V)=P(\overline{R})=\frac{5}{8}}$.

$n\geqslant 2$ donc lorsque l'on tire 2 boules de U_2, on peut obtenir 2 boules rouges (notées RR), 2 boules vertes (notées VV) ; 2 boules blanches (notées BB) et 2 boules de couleurs différentes (notées A).

On obtient l'arbre :



Si on tire une boule rouge dans l'urne U_1 alors dans l'urne U_2, il y a $(n+1)$ boules rouges et 3 vertes et 2 blanches donc $(n+6)$ boules.

On tire au hasard et simultanément 2 boules de l'urne donc la loi est équirépartie.

Une éventualité est une combinaison de 2 éléments d'un ensemble de $(n+6)$ éléments. Le cardinal de l'univers est $\binom{n+6}{2}$.

$$\boxed{\binom{n+6}{2}=\frac{(n+6)!}{2!(n+6-2)!}=\frac{(n+5)(n+6)}{2}}$$

Le nombre de possibilités de tirer 2 boules rouges parmi les $(n+1)$ boules rouges est le nombre $\binom{n+1}{2}$.

$\boxed{\binom{n+1}{2}=\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}=\frac{n(n+1)}{2}}$

Et, donc, $\boxed{P_R(RR)=\frac{n(n+1)}{2}\div\frac{(n+5)(n+6)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{2}{(n+5)(n+6)}=\frac{n(n+1)}{(n+5)(n+6)}}$

<u>**Le nombre de possibilités de tirer 2 boules vertes**</u> parmi les 3 boules vertes est le nombre $\binom{3}{2}=3$.

Et, donc, $\boxed{P_R(VV)=3\div\frac{(n+5)(n+6)}{2}=\frac{6}{(n+5)(n+6)}}$

<u>**Le nombre de possibilités de tirer 2 boules blanches**</u> parmi les 2 boules blanches est le nombre $\binom{2}{2}=1$.

Et, donc, $\boxed{P_R(BB)=1\div\frac{(n+5)(n+6)}{2}=\frac{2}{(n+5)(n+6)}}$

Il n'est pas nécessaire de calculer $P_R(A)=1-P_R(RR)-P_R(VV)-P_R(BB)$

Si on tire une boule verte dans l'urne U_1 alors l'urne U_2 contient n boules rouges, 4 boules vertes et 2 boules blanches, donc $(n+6)$ boules. Le cardinal de l'univers est aussi $\binom{n+6}{2}=\frac{(n+5)(n+6)}{2}$.

<u>**Le nombre de possibilités de tirer 2 boules rouges**</u> parmi les n boules rouges est le nombre $\binom{n}{2}$.

$\binom{n}{2}=\frac{(n-1)n}{2}$

Et, donc, $\boxed{P_V(RR)=\frac{(n-1)n}{2}\div\frac{(n+5)(n+6)}{2}=\frac{(n-1)n}{(n+5)(n+6)}}$

<u>**Le nombre de possibilités de tirer 2 boules vertes**</u> parmi les 4 boules vertes est le nombre $\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!2!}=6$.

Et, donc, $\boxed{P_V(VV)=6\div\frac{(n+5)(n+6)}{2}=\frac{12}{(n+5)(n+6)}}$

<u>**Le nombre de possibilités de tirer 2 boules blanches**</u> parmi les 2 boules blanches est le nombre $\binom{2}{2}=1$.

Et, donc, $\boxed{P_V(BB)=1\div\frac{(n+5)(n+6)}{2}=\frac{2}{(n+5)(n+6)}}$

Il n'est pas nécessaire de calculer $P_V(A)$.

$(X=5)=RR$

$P(X=5)=P_R(RR)\times P(R)+P_V(RR)\times P(V)$

$P(X=5)=\frac{(n+1)n}{(n+6)(n+5)}\times\frac{3}{8}+\frac{n(n-1)}{(n+6)(n+5)}\times\frac{5}{8}$

$\boxed{P(X=5)=\frac{4n^2-n}{4(n+5)(n+6)}}$

$(X=2)=VV$

$P(X=2)=P_R(VV)\times P(R)+P_V(VV)\times P(V)$

$P(X=2)=\frac{6}{(n+6)(n+5)}\times\frac{3}{8}+\frac{12}{(n+6)(n+5)}\times\frac{5}{8}$

$\boxed{P(X=2)=\frac{39}{(n+6)(n+5)}}$

$(X=1)=BB$

$P(X=1)=P_R(BB)\times P(R)+P_V(BB)\times P(V)$

$P(X=1)=\frac{2}{(n+6)(n+5)}\times\frac{3}{8}+\frac{12}{(n+6)(n+5)}\times\frac{5}{8}$

$\boxed{P(X=1)=\frac{2}{(n+5)(n+6)}}$

$(X=-2)=A$

$P(X=-2)=1-P(X=5)-P(X=2)-P(X=1)$

$P(X=-2)=1-\frac{4n^2-n}{4(n+5)(n+6)}-\frac{39}{4(n+5)(n+6)}-\frac{8}{4(n+5)(n+6)}$

$P(X=-2)=\frac{4(n^2+11n+30)-4n^2+n-39-8}{4(n+5)(n+6)}$

$\boxed{P(X=-2)=\frac{45n+73}{4(n+5)(n+6)}}$

x_k	-2	1	2	3	TOTAL
$P(X=x_k)$	$\frac{45n+73}{4(n+5)(n+6)}$	$\frac{2}{(n+5)(n+6)}$	$\frac{39}{4(n+5)(n+6)}$	$\frac{4n^2-n}{4(n+5)(n+6)}$	1

2. $E(X)=-2\times\frac{45n+73}{4(n+5)(n+6)}+1\times\frac{8}{4(n+5)(n+6)}+2\times\frac{39}{4(n+5)(n+6)}+5\times\frac{4n^2-n}{4(n+5)(n+6)}$

$\boxed{E(X)=\frac{20n^2-95n-60}{4(n+5)(n+6)}}$

Le jeu est **le plus équitable possible** lorsque $E(X)$ est **le plus proche possible de 0**.

$E(X)=\frac{5}{4}\times f(n)$ avec $f(x)=\frac{4x^2-19x-12}{x^2+11x+30}$.

f est définie sur $[2;+\infty[$ $n\in\mathbb{N}$ et $n\geqslant 2$

$4x^2-19x-12=0$

$\Delta=19^2+16\times 12=553$

$x_1=\frac{19-\sqrt{553}}{8}\approx -0{,}56\notin[2;+\infty[$

$x_2=\frac{19+\sqrt{553}}{8}\approx 5{,}31\in[2;+\infty[$ qui n'est pas un entier.

On étudie les variations de f.

$f'(x)=\frac{3(21x^2+88x-146)}{(x^2+11x+30)^2}$

On vérifie facilement que $f'(x)$ est positif sur $[2;+\infty[$, f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

On calcule $f(5)$ et $f(6)$

$f(5)=\frac{-7}{110}\approx -0{,}0636$ et $f(6)=\frac{3}{22}\approx 0{,}136$

La valeur de n rendant le jeu le plus équitable possible est 5.

Dans ce cas, $\boxed{E(X)=-\frac{7}{110}\times\frac{5}{4}=-\frac{7}{88}\approx -0{,}0795}$

3. $n=5$

$P(X=-2)=\frac{298}{440}$ $P(X=1)=\frac{8}{440}$ $P(X=2)=\frac{39}{440}$ $P(X=5)=\frac{95}{440}$

$\boxed{V(X)=\left(-2+\frac{7}{88}\right)^2\times\frac{298}{440}+\left(1+\frac{7}{88}\right)^2\times\frac{8}{440}+\left(2+\frac{7}{88}\right)^2\times 39\times 440+\left(5+\frac{7}{88}\right)^2\times\frac{95}{440}=\frac{328083}{38720}}$

$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\approx 2{,}911}$