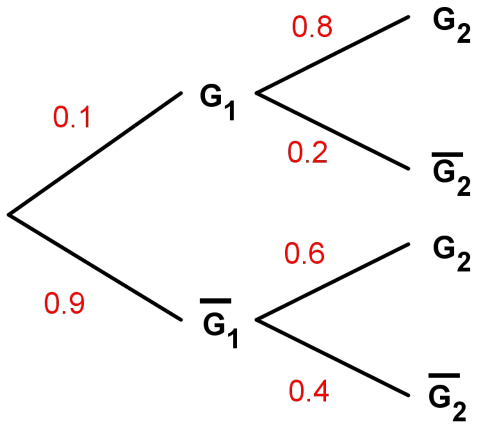
Exercice

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :
• la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
• s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
• s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.
On note, pour tout entier naturel n non nul :
• G_n l'événement « le joueur gagne la $n-ième$ partie » ;
• p_n la probabilité de l'événement G_n .
On a donc $p_1=0,1$.
1. Montrer que $p_2=0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n=\frac{3}{4}-\frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.
6. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.
7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\frac{3}{4}-p_n<10^{-7}$?

Correction :

1.



$p(\overline{G_1})=1-0{,}1=0{,}9$

$p_{G_1}(G_2)=1-0{,}8=0{,}2$

$\boxed{p_{\overline{G_1}}=1-0{,}6=0{,}4}$

$p_2=p(G_2)=p_{G_1}(G_2)\times p(G_1)+p_{\overline{G_1}}(G_2)\times p\left(\overline{G_1}\right)$

$p_2=0{,}8\times 0{,}1+0{,}6\times 0{,}9$

$p_2=0{,}8+0{,}54$

$\boxed{p_2=0{,}62}$

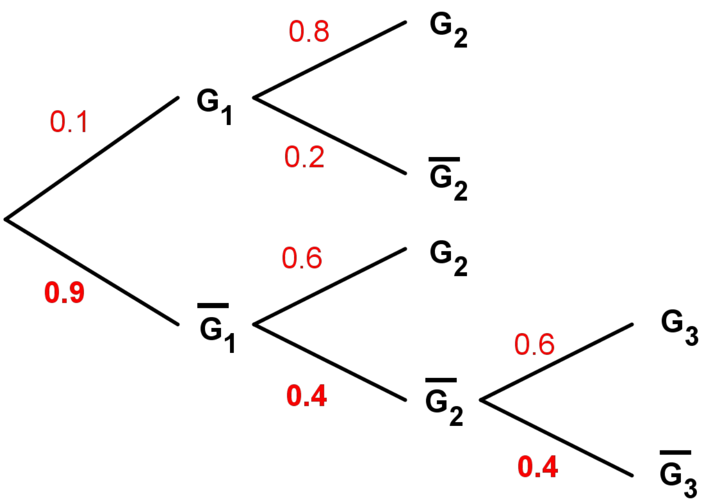
2. On doit calculer $p_{G_2}\left(\overline{G_1}\right)=\dfrac{p\left(G_2\cap\overline{G_1}\right)}{p\left(\overline{G_1}\right)}$

Or, $p\left(G_2\cap\overline{G_1}\right)\;=0{,}6\times 0{,}9=0{,}54$

Donc, $\boxed{p_{G_2}\left(\overline{G_1}\right)=\dfrac{0{,}54}{0{,}62}=\dfrac{54}{62}=\dfrac{27}{31}\approx 0{,}871}$

3. $\overline{A}$ est l'événement : « le joueur perd les 3 premières parties ».

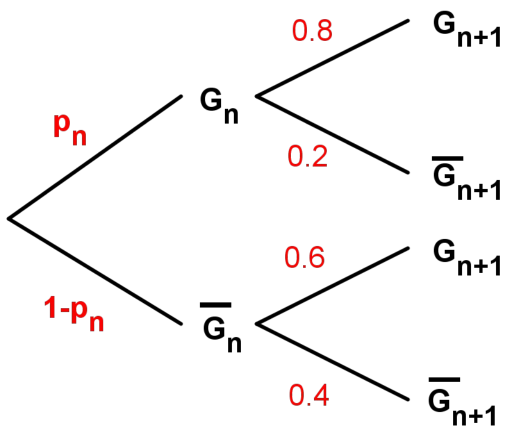
$\overline{\mathrm{A}}=\overline{\mathrm{G}_1}\cap\overline{\mathrm{G}_2}\cap\overline{\mathrm{G}_3}$



$P(\overline{A})=0{,}9\times0{,}4\times0{,}4=0{,}144$

$\boxed{P(A)=1-0{,}144=0{,}856}$

4.



$p(G_{n+1})=p_n\times0{,}8+(1-p_n)\times0{,}6$

$p(G_{n+1})=0{,}2\,p_2+0{,}6$

$\boxed{p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}}$

5. Pour $n=1$

$p_n=0{,}1$

$\frac{3}{4}-\frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^1=\frac{3}{4}-\frac{13}{20}=\frac{1}{10}=0{,}1$

Donc, **la propriété est vérifiée** pour $\boxed{n=1}$.

On **suppose que pour tout entier** n non nul, $\boxed{p_n=\frac{3}{4}-\frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

$p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}$

$p_{n+1}=\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}-\frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)+\frac{3}{5}$

$p_{n+1}=\frac{3}{20}-\frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}+\frac{3}{5}$

$p_{n+1}=\frac{15}{20}-\frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$

$p_{n+1}=\frac{3}{4}-\frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$

D'après **le principe de récurrence**, pour tout entier naturel n non nul, $\boxed{p_n=\frac{3}{4}-\frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n}$.

6. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=0$. Donc, $\boxed{\lim_{n\to+\infty}p_n=\frac{3}{4}}$

7. $\frac{3}{4}-p_n<10^{-7}$

$\Leftrightarrow \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n<10^{-7}$

Or, $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

$\Leftrightarrow \ln\frac{13}{4}+n\ln\frac{1}{5}<-7\ln 10$

$\Leftrightarrow n\ln\frac{1}{5}<-\ln\frac{13}{4}-7\ln 10$

$\Leftrightarrow -n\ln 5<-\ln\frac{13}{4}-7\ln 10$

Or, $\ln 5>0$

$n>\frac{\ln\frac{13}{4}+7\ln 10}{\ln 5}\approx 10{,}7$

Or, n est un entier naturel

Donc, $\boxed{n\geqslant 11}$