

Exercice

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.

a. Vérifier que $P(X=0) = \frac{3}{10}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

c. Calculer la probabilité de l'événement suivant :

A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».

2. On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :

si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas.

a. En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité des événements suivants :

B : « seule la première boule tirée est verte »,

C : « une seule des deux boules tirées est verte ».

b. Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

Correction :

a. On différencie les 5 boules (par exemple en mettant un numéro sur chaque boule).

Les boules sont indiscernables au toucher donc la loi de probabilité est équirépartie.

On extrait simultanément 2 boules de l'urne donc une éventualité est une combinaison de 2 éléments d'un ensemble de 5 éléments.

Le cardinal de l'univers est : « **2 parmi 5** » : $\boxed{\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10}$

$(X=0)$ est **l'événement 2 boules rouges**

$$\boxed{P(X=0) = \frac{\binom{3}{2}}{10} = 0,3}$$

$(X=1)$ est **l'événement 1 boule rouge et une boule verte**

$$\boxed{P(X=1) = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{3}{1}}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6}$$

$(X=2)$ est **l'événement 2 boules vertes**

$$\boxed{P(X=2) = \frac{\binom{2}{2}}{10} = \frac{1}{10} = 0,1}$$

On donne la loi de probabilité sous forme de tableau.

x_k	0	1	2
$P(x_k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

b. $\boxed{E(X) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0,8}$

c. A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».

Première méthode :

$A = (X=0) \cup (X=2)$ Les deux événements $(X=0)$ et $(X=2)$ sont incompatibles.

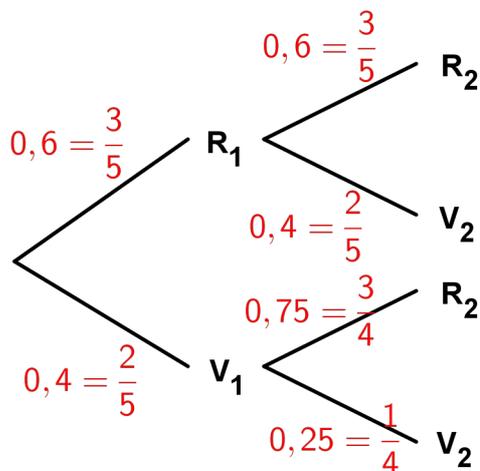
$$\boxed{p(A) = p(X=0) + p(X=2) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0,4}$$

Deuxième méthode :

$$\bar{A} = p(X=1)$$

$$\boxed{p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0,4}$$

2. a.



$$p(B) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$$

$$p(C) = 0,4 \times 0,6 + 0,75 \times 0,4 = 0,24 + 0,3 = 0,54$$

b. On doit calculer $p_C(V_1) = \frac{p(V_1 \cap C)}{p(C)}$.

$V_1 \cap C = V_1 \cap R_2$ et $p(V_1 \cap R_2) = 0,3$ donc $p_C(V_1) = \frac{0,3}{0,54} = \frac{30}{54} = \frac{1}{18} \approx 0,056$.