Exercice

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner. Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.
On appelle N l'événement « la boule noire figure parmi les boules tirées » et G l'événement « le joueur gagne ».

1. a. Déterminer la probabilité de l'événement N.
b. Démontrer que la probabilité de l'événement G est égale à $\frac{3}{10}$.On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
c. Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?

2. Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m euros est demandée, où m est un réel strictement positif.
Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros.
S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.
S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.
On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.
b. Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m.
c. On dit que le jeu est équitable si l'espérance mathématique de X est nulle.
Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

Correction :

1. a. Les boules sont indiscernables au toucher donc la loi de probabilité pour le tirage des 4 boules du sac est équirépartie.

Le cardinal de l'univers est « 4 parmi 10 » : $\boxed{\binom{10}{4}=\frac{10!}{4!6!}=210}$.

N est l'événement « la boule noire figure parmi les boules tirées ».

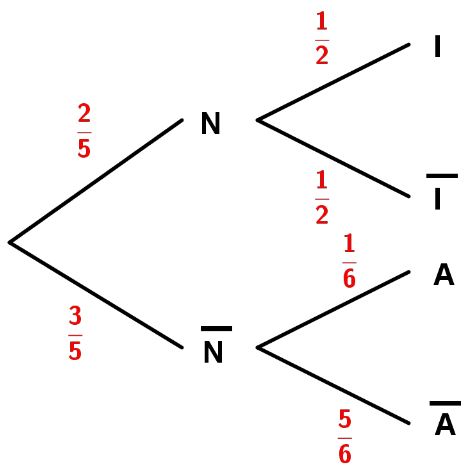
$$\boxed{p(N)=\frac{\binom{1}{1}\times\binom{9}{3}}{210}=\frac{84}{210}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}=0{,}4}$$

b. On note :
I: « On obtient un chiffre impair en lançant le dé »
$\overline{I}$:« On obtient un chiffre pair en lançant le dé »

$$\boxed{p(I)=p(\overline{I})=\frac{1}{2}}$$

A: « on obtient 6 en lançant le dé »
$\overline{A}$: « on obtient un chiffre distinct de 6 en lançant le dé »

$\boxed{p(A)=\frac{1}{6}}$ et $\boxed{p(\overline{A})=\frac{5}{6}}$.



$$p(G)=p_N(\overline{I})\times p(N)+p_{\overline{N}}(A)\times p(\overline{N})$$

$$\boxed{p(G)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}=0{,}3}.$$

c. On demande de calculer $p_{\overline{G}}(N)=\dfrac{p(N\cap\overline{G})}{p(\overline{G})}$.

Or, $p(N\cap\overline{G})=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}=0{,}2$.

$p(\overline{G})=1-0{,}3=0{,}7$

Donc, $\boxed{p_{\overline{G}}(N)=\frac{0{,}2}{0{,}7}=\frac{2}{7}\approx 0{,}286}$.

2. a. Les valeurs de X sont : $4-m$; 0 ; $-m$.

$\boxed{p(X=4-m)=p(G)=0{,}3}$

$\boxed{p(X=0)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}=0{,}2}$

$\boxed{p(X=-m)=1-0{,}3-0{,}2=0{,}5}$

On donne la loi de probabilité sous forme de tableau :

x_k	- m	0	4 - m
P (x_k)	0.5	0.2	0.3

b. $\boxed{E(X)=-m\times 0{,}5+0\times 0{,}2+(4-m)\times 0{,}3=1{,}2-0{,}8\,m}$

c. Le jeu est équitable si et seulement si $\boxed{E(X)=0}$
donc $1{,}2-0{,}8\,m=0$
$m=\frac{1{,}2}{0{,}8}=\frac{12}{8}=1{,}5$
Le jeu est équitable pour $\boxed{m=1{,}5\,€}$

3. On a une épreuve de Bernoulli de paramètres n et $p=\frac{3}{10}$.

La probabilité de ne jamais gagner en n jeux est $\left(\frac{7}{10}\right)^n$, donc la probabilité de gagner au moins une fois est : $1-\left(\frac{7}{10}\right)^n$.

Il faut donc résoudre :

$1-\left(\frac{7}{10}\right)^n>0{,}999$

$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{7}{10}\right)^n<0{,}001 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad n\ln 0{,}7<\ln 0{,}001$ (car la fonction ln est croissante)

$\Leftrightarrow \quad n>\frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}7}\approx 19{,}3$

Il faudra donc jouer au moins 20 fois.