Probabilités élémentaires

1. Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux pièces de monnaie bien équilibrées.

1.1. Simulation

On considère l'événement « Obtenir 2 fois pile » que l'on note 2P.

La simulation utilisant le tableau openOffice de dix séries de n lancers de deux pièces a permis d'obtenir, pour différentes valeurs de n, les fréquences de 2P suivantes :

n=100	0.22	0.27	0.32	0.19	0.25	0.25	0.20	0.26	0.25	0.27
n=1000	0.249	0.247	0.243	0.241	0.261	0.250	0.270	0.277	0.200	0.261
n=10000	0.255	0.254	0.253	0.255	0.244	0.247	0.237	0.252	0.243	0.242

Simulation :

A P, on associe 1 et à F, on associe 0.

En A_1 : =Alea.entre.bornes(0;1)

En B_1 : =Alea.entre.bornes(0;1)

En C_1 : $=A_1*B_1$

Pour 2P, on obtient 1 et pour PF ou 2F, on obtient 0.

En E_1 : =Somme(C_1;C_n)

En $E_2=E_1/n$

On obtient la fréquence en n épreuves.

On choisit Ω={2P;2F;PF} comme ensemble des résultats possibles ou ensemble des issues ou univers.

Étant donnés les résultats des simulations, on peut proposer comme loi de probabilité sur Ω:

ω_i	2P	2F	PF
p_i	0.25	0.25	0.5

1.2. En recherchant une situation d'équiprobabilité

La loi de probabilité est dite **équirépartie** lorsqu'elle associe la même probabilité à chaque issue.

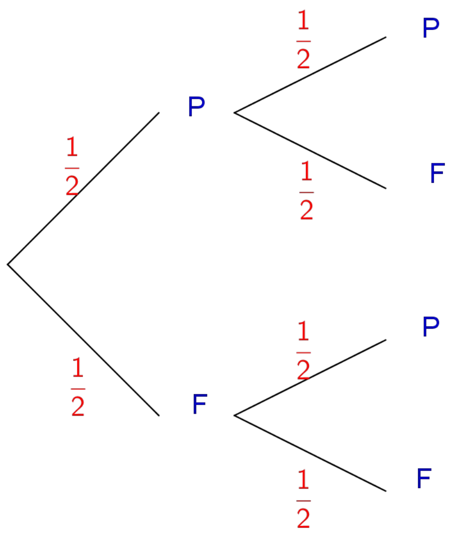
On choisit comme univers :

Ω'={(P;P);(P;F);(F;P);(F;F)}

Pour cela, il suffit de différencier les 2 pièces.

ω_i	(P;P)	(P;F)	(F;P)	(F;F)
p_i	0.25	0.25	0.25	0.25

On peut représenter l'univers en utilisant un arbre.



1.3. Des autres événements

Soit D l'événement : « Obtenir un double » (obtenir 2 fois pile ou 2 fois face)

Soit E l'événement : « Obtenir au moins une fois pile »

Calculer les probabilités des événements : D ; E ; D∩E et D∪E

$P(D)=P(P;P)+P(F;F)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$P(D\cap E)=P(P;P)=\frac{1}{4}$

$P(D\cup E)=P(P;P)+P(F;F)+P(P;F)+P(F;P)=1$

1.4. Utilisation d'une variable aléatoire

Pour une mise de1€, un joueur est invité à lancer 2 pièces de monnaie. Il gagne 1€ pour chaque pile obtenu et perd 1€ s'il n'obtient aucun pile.

On désigne par X la variable aléatoire associant à chaque lancer le gain algébrique du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Combien le joueur peut-il espérer gagner par partie ?

a) Pour (P;P) : 2-1=1€

Pour (P;F) : 1-1=0€

Pour (F;P) : 1-1=0€

Pour (F;F) : -1-1=-2€

x_i	-2	0	1
$P(X=x_i)$	0.25	0.5	0.25

b) $E(X)=-2\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}=-0{,}25$

Le joueur effectuant « un grand nombre de parties »peut espérer « gagner » en moyenne : -0,25€ , c'est à dire perdre 0,25€ par partie)

2. Vocabulaire

$\Omega=\{\omega_1; \omega_2 ;\dots ;\omega_n\}$ ensemble fini est **l'univers**.

$\omega_1; \omega_2 ;\dots ;\omega_n$ sont **les éventualités (ou les issues)**.

Les parties de Ω (c'est à dire les éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$) sont **les événements**.

$\{\omega_i\}$ est **un événement élémentaire** que l'on confond souvent avec l'éventualité ω_i.

$\varnothing$ est **l'événement impossible**.

Ω est **l'événement certain**.

Si A est **une partie** non vide de Ω alors A est une **réunion d'événements élémentaires**.

Si A et B sont deux parties de Ω alors $A\cup B$ est l'événement A **ou** B et $A\cap B$ est l'événement A **et** B.

Si A est une partie de Ω et $\overline{A}$ son complémentaire dans Ω alors $\overline{A}$ est **l'événement contraire** de A.

Rappel :

Si $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans Ω alors $\overline{A}$ est l'unique partie de Ω vérifiant : $\begin{cases} A\cup\overline{A}=\Omega \\ A\cap\overline{A}=\varnothing \end{cases}$

Si A et B sont deux parties de Ω telles que $A\cap B=\varnothing$ alors on dit que les événements A et B sont **incompatibles**.

3. Espaces probabilisés finis

3.1. Définition

Ω est un ensemble fini. P est une application qui a toute partie de Ω associe un nombre réel compris entre 0 et 1. On dit que P est une probabilité sur Ω si et seulement si $P(\Omega)=1$ et pour tous événements A et B incompatibles ($A\cap B=\varnothing$) on ait $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

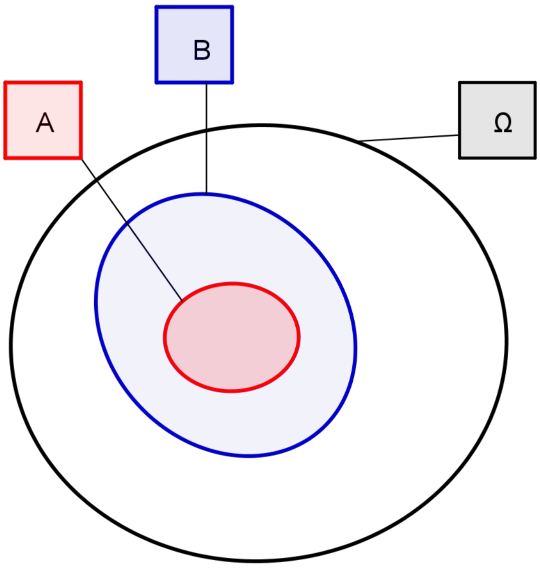
3.2. Propriétés

a) $\Omega \cup \emptyset = \Omega$ et $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$

$P(\Omega)=P(\Omega \cup \emptyset)=P(\Omega)+P(\emptyset)$

Donc : $\boxed{P(\emptyset)=0}$

b) A et B sont deux événements et $A \subset B$ (c'est à dire tous les éléments de A appartiennent à B).



On pose $A_1 = \overline{A} \cap B$

A_1 est l'ensemble des éléments de B n'appartenant pas à A.

Donc, $B = A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup A_1$

On a $A \cap A_1 = A \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$

Donc, $P(B)=P(A \cup A_1)=P(A)+P(A_1)$

Or, $P(A_1) \geq 1$ (la probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1).

Donc, $P(B) \geq P(A)$

$\boxed{\text{Si } A \subset B \text{ alors } P(A) \leq P(B)}$

On dit que P est **une fonction croissante.**

c) Pour tout événement A, on a :

$A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$

$P(\Omega)=P(A \cup \overline{A})=1=P(A)+P(\overline{A})$

Donc,

$\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$

Ou

$\boxed{P(A)=1-P(\overline{A})}$

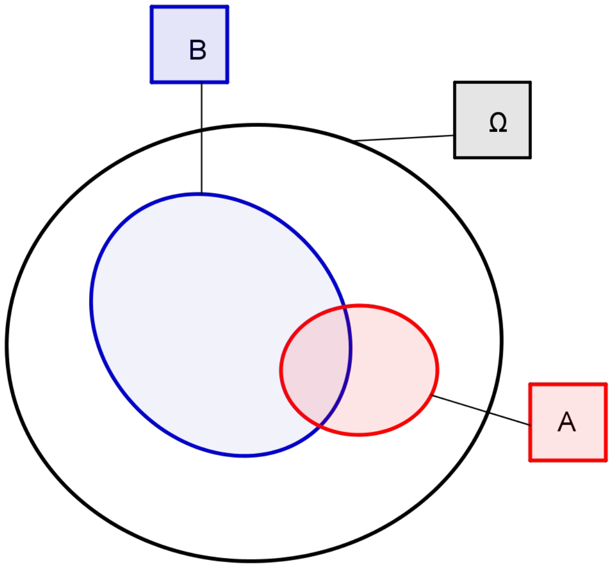
d) Généralisation

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si A_1 ; A_2 ; A_3 ;...A_n sont n événements incompatibles 2 à 2 (c'est à dire pour tous entiers naturels distincts i et j compris entre 1 et n $A_i \cap A_j = \emptyset$) alors $\boxed{P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$

e) Probabilité d'une réunion de 2 événements

A et B sont deux événements. On veut déterminer la probabilité de $A \cup B$. On ne suppose pas que $A \cap B = \emptyset$



$I = A \cap B$ est l'ensemble des éléments communs à A et B.

$I_1 = A \cap \overline{B}$ est l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B.

$I_2 = \overline{A} \cap B$ est l'ensemble des éléments de B n'appartenant pas à A.

$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

$A \cup B = I \cup I_1 \cup I_2$

Les événements I ; I_1 et I_2 sont incompatibles deux à deux, donc :

$P(A \cup B) = P(I) + P(I_1) + P(I_2)$

Or, $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

Les deux événements $(A \cap B)$ et $(A \cap \overline{B})$ sont incompatibles.

On obtient :

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

Soit :

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

De même, B=(A∩B)∪($\overline{A}$ ∩B)

D'où, P(B)=P(A∩B)+P($\overline{A}$ ∩B)

Soit :

P($\overline{A}$ ∩B)=P(B)-P(A∩B)

Conséquence :

P(A∪B)=P(A∩B)+P(A)-P(A∩B)+P(B)-P(A∩B)

Conclusion :

$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$

4. Lois de probabilité

4.1. Cas général

$\Omega=\{\omega_1;\ \omega_2\ ;\ldots\ ;\omega_n\}$

P est une probabilité sur Ω.

On note $\Pi_1=P(\{\omega_1\})=P(\omega_1)$; $\Pi_2=P(\{\omega_2\})=P(\omega_2)$; … ; $\Pi_n=P(\{\omega_n\})=P(\omega_n)$.

Pour tout entier naturel i compris entre 1 et n , on a $1\leq\Pi_i\leq n$

$\Omega=\bigcup_{i=1}^{n}\{\omega_i\}$

Pour tous entiers naturels distincts i et j compris entre 1 et n ., on a $\omega_i\neq\omega_j$ donc $\{\omega_i\}\cap\{\omega_j\}=\emptyset$.

$$P(\Omega)=P(\bigcup_{i=1}^{n}\{\omega_i\})=\sum_{1}^{n}P(\{\omega_i\})=\sum_{i=1}^{n}\Pi_i=1$$

Donc : $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\Pi_i=1}$

<u>Conséquence :</u>

Si on connaît les Π_i on est capable de calculer la probabilité de tout événement.

La donnée des Π_i est **la loi de probabilité**, on donne généralement la loi de probabilité sous forme de tableau.

ω_i	ω_1	ω_2		ω_n
$P(\omega_i)$	π_1	π_2		π_n

<u>Rappel :</u>

Si on détermine les Π_i après expérimentation ou simulation, alors si p est la probabilité d'un événement et f_n la fréquence de réalisation de cet événement lorsqu'on répète l'expérience n fois, la distance $|f_n-p|$ reste, dans au moins 95% des cas, inférieur à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

4.2. Probabilité uniforme ou loi équirépartie

On dit que la loi est **équirépartie** lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité donc :

$\Pi_1 = \Pi_2 = \ldots = \Pi_n$

Or, $\sum_{i=1}^{n} \Pi_i = 1 = n\,\Pi_1$

Donc, pour tout entier naturel compris entre 1 et n :

$$\boxed{P(\omega_i) = \frac{1}{n} = \frac{1}{card\,\Omega}}$$

A est une partie de Ω.

Si A=$\emptyset$ alors P(A)=0

Si A=$\{\omega_2\,;\omega_3;\omega_6\}$ alors P(A)=$\Pi_2+\Pi_3+\Pi_6 = \frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{3}{n}$

Or, 3=card A

Donc, $\boxed{P(A) = \frac{card\,A}{card\,\Omega}}$

Conséquence :

Si la loi est équirépartie alors résoudre un problème de probabilité revient à résoudre un problème de dénombrement.

5. Variables aléatoires

5.1. Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer trois pièces de monnaie bien équilibrées. Il y a 8 issues à cette expérience.

Ω={PPP;PPF;PFP;FPP;PFF;FPF;FFP;FFF}

On suppose que la loi est équirépartie (c'est à dire la probabilité de chaque issue est $\frac{1}{8}$).

Pour une mise de 1€, un joueur est invité à lancer 3 pièces de monnaie, il gagne 2€ pour chaque pile obtenu et perd un euro pour chaque face. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

5.2. Définition

Soit Ω un univers fini muni d'une probabilité. On nomme **variable aléatoire** réelle toute application de Ω dans ℝ.

Notation :

$\Omega=\{\omega_1;\ \omega_2\ ;\dots\ ;\omega_n\}$

$X(\omega_i)=x_k$

On classe les x_k dans l'ordre croissant : $x_1<x_2<\dots<x_k<\dots<x_p$

(attention x_1 n'est pas nécessairement l'image de ω_1 par X)

$\mathcal{X}=\{x_1;\ x_2\ ;\dots\ ;x_p\}$ est l'univers image.

$(X=\{x_k\})=\{\omega_j,X(\omega_j)=x_k\}$

$(X=\{x_k\})$ est un événement.

Si $x\notin\mathcal{X}$ alors $(X=x)=\emptyset$

Pour l'exemple :

$X(PPP)=3\times2-1=5$

$X(PPF)=2\times2-1\times1-1=2$

$X(PFP)=2\times2-1\times1-1=2$

$X(FPP)=2\times2-1\times1-1=2$

$X(PFF)=2\times1-1\times2-1=-1$

$X(FPF)=2\times1-1\times2-1=-1$

$X(FFP)=2\times1-1\times2-1=-1$

$X(FFF)=0\times2-3\times1-1=-4$

$\mathcal{X}=\{-4;-1;2;5\}$

(X=-1)={PFF;FPF;FFP}

$(X=0)=\emptyset$

5.3. Loi de probabilité

Soit l'univers Ω muni de la probabilité P et X une variable aléatoire réelle sur Ω.

On nomme **loi de probabilité** de X, l'application φ de ℝ dans [0;1] définie par $\phi(x)=P(X=x)$.

Si $x \notin \{x_1; x_2; \dots; x_p\}$ alors $\varphi(x)=0$

Pour $x \in \{x_1; x_2; \dots; x_p\}$, on dispose les résultats sous forme de tableau.

Pour l'exemple :

$P(X=-4)=\frac{1}{8}$ $P(X=-1)=\frac{3}{8}$ $P(X=2)=\frac{3}{8}$ $P(X=5)=\frac{1}{8}$

x_i	-4	-1	2	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

5.4. Notation

$x \in \mathbb{R}$

$(X \leq x)=\{\omega_j, X(\omega_j) \leq x\}$

$(X \leq x)$ est un événement.

Si $x < x_1$ alors $(X \leq x)=\emptyset$

Si $x_p \leq x$ alors $(X \leq x)=\Omega$

Pour l'exemple :

$(X \leq -6)=\emptyset$

$(X \leq \sqrt{3})=(X=-4)\cup(X=-1)=\{FFF;PFF;FPF;FFP\}$

$(X \leq 6)=\Omega$

5.5. Espérance mathématique

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un univers fini Ω muni de la probabilité P et prenant les valeurs $x_1; x_2; \dots x_p$

On nomme **espérance mathématique** de X le réel noté E(X) défini par :
$E(X)=x_1 \times P(X=x_1)+x_2 \times P(X=x_2)+\dots+P(X=x_p)$

Pour l'exemple :

$$E(X)=-4\times\frac{1}{8}-1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+5\times\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=0{,}5$$

5.6. Variance

On nomme **variance** de X le réel noté Var(X) défini par :

$$Var(X)=(x_1-E(X))^2\times P(X=x_1)+(x_2-E(X))^2\times P(X=x_2)+\ldots+(x_p-E(X))^2\times P(X=x_p)$$

$$Var(X)=x_1^2\times P(X=x_1)+x_2^2\times P(X=x_2)+\ldots+x_p^2\times P(X=x_p)-(E(X))^2$$

Pour l'exemple :

$$Var(X)=(-4-0,5)^2\times\frac{1}{8}+(-1-0,5)^2\times\frac{3}{8}+(2-0,5)^2\times\frac{3}{8}+(5-0,5)^2\times\frac{1}{8}$$

$$Var(X)=6,75=\frac{27}{4}$$

On peut vérifier :

$$(-4)^2\times\frac{1}{8}+(-1)^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+5^2\times\frac{1}{8}-0,5^2=6,75=\frac{27}{4}$$

5.7. Ecart-type

On nomme **écart-type** d'une variable aléatoire réelle X le réel noté σ(X) défini par :

$$\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}$$

Pour l'exemple :

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2,6$$