

Exercice

Les grecs et les romains utilisaient à la place des dés des osselets d'agneaux appelés astragales.

Ces astragales pouvaient retomber sur l'une de leurs 4 faces, numérotées ici de 1 à 4.

p_i désignant la probabilité qu'un astragale retombe sur la face n°i, des expériences statistiques ont permis d'établir que $p_1 = p_2$; $p_3 = p_4$ et $p_1 = 4 p_3$.

1. Déterminer la loi de probabilité sur $\{1;2;3;4\}$.

2. Calculer les probabilités des événements :

a) A : « Obtenir un nombre pair ».

b) B : « Obtenir le 1 ou le 4 ».

c) $C = \overline{A} \cup \overline{B}$

Correction :

$$1. \quad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

$$4 p_3 + 4 p_3 + p_3 + p_3 = 1$$

$$10 p_3 = 1$$

$$p_3 = \frac{1}{10}$$

$$\text{Donc, } p_4 = p_3 = \frac{1}{10} \text{ et } p_1 = p_2 = 4 p_3 = \frac{4}{10}.$$

On écrit **la loi de probabilité** sous forme de tableau :

ω_i	1	2	3	4
$P(\omega_i)$	$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$	$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$2. \text{ a) } A = \{2; 4\}$$

$$P(A) = P(2) + P(4) = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } B = \{1; 4\}$$

$$P(B) = P(1) + P(4) = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \bar{A} = \{1; 3\} \text{ et } \bar{B} = \{2; 3\}$$

$$C = \bar{A} \cup \bar{B} = \{1; 2; 3\}$$

$$P(C) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{4}{10} + \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

Remarques :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{3\}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(3) = \frac{1}{10}$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A \cap B}$$

$$A \cap B = \{4\}$$

$$P(A \cap B) = P(4) = \frac{1}{10}$$

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A \cap B}) = \boxed{1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}}$$