Équations du ax+by=c

1. Généralités

a et b sont des entiers relatifs non nuls donnés. c est un entier relatif.

On se propose de déterminer les entiers relatifs x et y tels que $ax+by=c$. (**équations diophantiennes**)

Remarque:

$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère du plan, on considère la droite (d) d'équation: $y=mx+p$

Si m et p sont des nombres rationnels:

$m=\frac{k}{l}$ $\quad k\in\mathbb{Z}$ et $l\in\mathbb{N}^*$

$p=\frac{q}{r}$ $\quad q\in\mathbb{Z}$ et $r\in\mathbb{N}^*$

(d): $y=\frac{k}{l}x+\frac{q}{r}$

Soit:

$lry=rkx+lq$

$-rkx+lry=lq$

On pose:

$-rk=a\in\mathbb{Z}$

$lr=b\in\mathbb{Z}$

$lq=c\in\mathbb{Z}$

On obtient: $ax+by=c$

Déterminer les entiers relatifs x et y tels que $ax+by=c$, c'est **déterminer les points de coordonnées entières de la droite (d)**.

2. Exemple 1

$\boxed{7x+12y=1}$

7 et 12 sont premiers entre eux d'après le théorème de Bezout, il existe des solutions à l'équation: $7x+12y=1$

Pour résoudre cette équation, on doit déterminer une solution particulière de l'équation (on peut utiliser l'algorithme d'Euclide)

$b=12 \quad a=7$

b	a	Quotient	reste
12	7	1	5
7	5	1	2
5	2	2	1
2	1	2	1

$b=a\times1+5$ donc $5=b-a$

$a=5\times1+2$
$a=(b-a)\times1+2$
$a=b-a+2$ donc $2=2a-b$

$5=2\times2+1$
$b-a=(2a-b)\times2+1$
$b-a=4a-2b+1$ donc $1=-5a+3b$

Donc le couple (-5;3) est une solution particulière de l'équation $7x+12y=1$.

$7x+12y=1$
$\Leftrightarrow 7x+12y=7\times(-5)+12\times3$
$\Leftrightarrow 7(x+5)=12(-y+3)$

7 divise $(-y+3)$
$\mathscr{P}$gcd(7; 12)=1
D'après le théorème de Gauss, 7 divise $-y+3$

Donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $-y+3=7k$

Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, si $-y+3=7k$ alors:
$7(x+5)=12(-y+3)$
$\Leftrightarrow 7(x+5)=12\times7k$
$\Leftrightarrow x+5=12k$

<u>Conclusion:</u>
Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $x+5=12k$ et $-y+3=7k$
et: $\begin{cases} x=12k-5 \\ y=-7k+3 \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$
$S=\{(12k-5;-7k+3), k\in\mathbb{Z}\}$

3. Exemple 2

$\boxed{9x+12y=3}$

$\mathscr{P}$gcd(9; 12)=3
On peut diviser les trois coefficients de l'équation par 3.

$9x+12y=3$

$\Leftrightarrow 3x+4y=1$

Or, $\mathscr{P}$gcd(3; 4)=1

On remarque que (-1;1) est une solution particulière de cette équation.

$3x+4y=1$
$\Leftrightarrow 3x+4y=3\times(-1)+4\times1$
$\Leftrightarrow 3(x+1)=4(-y+1)$

3 divise $(-y+1)$
$\mathscr{P}$gcd(3; 4)=1

D'après le théorème de Gauss, 3 divise $-y+1$

Donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $-y+1=3k$

Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, si $-y+1=3k$ alors:
$3(x+1)=4(-y+1)$
$\Leftrightarrow 3(x+1)=4\times 3k$
$\Leftrightarrow x+1=4k$

<u>Conclusion:</u>
Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $x+1=4k$ et $-y+1=3k$
et: $\begin{cases} x=4k-1 \\ y=-3k+1 \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$

$S=\{(4k-1;-3k+1), k\in\mathbb{Z}\}$

4. Exemple 3

$\boxed{8x+12y=2}$

$\mathscr{P}$gcd(8; 12)=4
Donc $4(2x+3y)=2$
Or, 4 n'est pas un diviseur de 2 donc l'équation n'admet pas de solution.

$S=\emptyset$

5. Exemple 4

$\boxed{1274x-275y=1}$

On considère les entiers naturels 1274 et 275

$a=1274$ $b=275$

a	b	Quotient	reste
1274	275	4	174
275	174	1	101
174	101	1	73
101	73	1	28
73	28	2	17
28	17	1	11
17	11	1	6
11	6	1	5
6	5	1	1
5	1	5	0

$\mathscr{P}$gcd(1274; 275)=1
$a=4b+174$ donc $174=a-4b$

$b=174+101$
$b=a-4b+101$ donc $101=-a+5b$

$174=101+73$
$a-4b=-a+5b+73$ donc $73=2a-9b$

$101=73+28$
$-a+5b=2a-9b+28$ donc $28=-3a+14b$

$73=28\times 2+17$
$2a-9b=(-3a+14b)\times 2+17$
$2a-9b=-6a+28b+17$ donc $17=8a-37b$

$28=17+11$
$-3a+14b=8a-37b+11$ donc $11=-11a+51b$

$17=11+6$
$8a-37b=-11a+51b+6$ donc $6=19a-88b$

$11=6+5$
$-11a+51b=19a-88b+5$ donc $5=-30a+139b$

$6=5+1$
$19a-88b=-30a+139b+1$ donc $1=49a-227b$
$1274\times 49-275\times 227=1$
(49; 227) est un solution particulière de l'équation.

(Remarque: pour cet exemple, il est très intéressant d'utiliser un tableur pour trouver cette solution. cf. chap.1)

$1274x-275y=1$
$\Leftrightarrow 1274x-275y=1274\times 49-275\times 227$
$\Leftrightarrow 1274(x-49)=275(y-227)$

1274 divise $275(y-227)$
$\mathscr{P}$gcd(1274; 275)=1
D'après le théorème de Gauss, 1274 divise $y-227$

Donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $y-227=1274k$

Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, si $y-227=1274k$ alors:
$1274(x-49)=275(y-227)$
$\Leftrightarrow 1274(x-49)=275\times 1274k$
$\Leftrightarrow x-49=275k$

<u>Conclusion:</u>
Pour tout $k\in\mathbb{Z}$ $x-49=275k$ et $y-227=1274k$
et: $\begin{cases} x=275k+49 \\ y=1274k+227 \end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$

$S=\{(275k+49;1274k+227), k\in\mathbb{Z}\}$

6. Exemple 5

$\boxed{1274\,x-275\,y=3}$

$\mathscr{P}$gcd(1274; 275)=1

Si on multiplie par 3 toute solution de l'équation précédente, on obtient une solution de cette équation.
$(3\times 275\,k+3\times 49\,;3\times 1274\,k+3\times 227)\,,k\in\mathbb{Z}$

Mais, toutes les solutions de cette nouvelle équation ne sont pas nécessairement de cette forme.

Pour résoudre cette équation, on détermine une solution particulière. Par exemple $(3\times 49\,;3\times 227)$, puis on effectue la résolution comme dans l'exemple précédent.
$S=\{(275\,k+3\times 49\,;1274\,k+3\times 227),k\in\mathbb{Z}\}$

7. Utilisation du logiciel Xcas

Dans l'application arithmétique :

Pour obtenir une solution particulière de l'équation $ax+by=c$, on utilise l'instruction $\boxed{iabcuv(a\,,b\,,c)}$

7.1. Exemple 1

$7\,x+12\,y=1$

On entre dans la barre de saisie : $\boxed{iabcuv(7{,}12{,}1)}$.

Le résultat affiché est : (-5,3)
Vérification :
$7\times(-5)+12\times 3=-35+36=1$

7.2. Exemple 2

$9\,x+12\,y=3$

On entre dans la barre de saisie : $\boxed{iabcuv(9{,}12\,{,}3)}$.

Le résultat affiché est : (-1,1)
Vérification :
$9\times(-1)+12\times 1=-9+12=3$

7.3. Exemple 3

$8x+12y=2$

On entre dans la barre de saisie : $\boxed{iabcuv(8,12,2)}$.

Le résultat affiché est : pas de solution
<u>Vérification :</u>
pgcd(8;12)=4 et 4 ne divise pas 2 donc l'équation n'admet pas de solution.

7.4. Exemple 4

$1274x+275y=1$

On entre dans la barre de saisie : $\boxed{iabcuv(1274,-275,1)}$.

Le résultat affiché est : (49,227)
<u>Vérification :</u>
$1274\times 49-275\times 227=62426-62425=1$

7.5. Exemple 5

$1274x+275y=3$

On entre dans la barre de saisie : $\boxed{iabcuv(1274,-275,3)}$.

Le résultat affiché est : (147,681)
<u>Vérification :</u>
$1274\times 147-275\times 681=187278-187275=3$