Exercice Bac 1999. Asie.

1. On considère l'équation (E): $8x+5y=1$, où $(x\,;y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a\,;b)$ de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N=8a+1 \\ N=5b+2 \end{cases}$$

a. Montrer que le couple $(a\,;-b)$ est solution de (E).

b. Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3. a. Résoudre l'équation $8x+5y=100$, où $(x\,;y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

b. Au VIII^{e} siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Correction :

1. a.

- On peut trouver **de manière intuitive** le couple (2;-3) comme solution: $8\times 2+5\times(-3)=1$
- **Méthode générale:**

on pose: $a=8 \quad b=5$

a	b	Quotient	reste
8	5	1	3
5	3	1	2
3	2	1	1
2	1	2	0

$a=b\times 1+3$ donc: $3=a-b$

$b=3\times 1+2$

$b=(a-b)\times 1+2$ donc: $2=b-a+b=-a+2b$

$3=2\times 1+1$

$a-b=(-a+2b)+1$ donc: $1=a-b+a-2b=2a-3b$

On a: $8\times 2+5\times(-3)=1$

Le couple **(2;-3)** est **une solution particulière de (E)**.

b. $8x+5y=1$

$\Leftrightarrow 8x+5y=8\times 2+5\times(-3)$

$\Leftrightarrow 8(x-2)=5\times(-y-3)$

8 divise $5(-y-3)$

$\mathscr{P}$gcd(8;5)=1

D'après **le théorème de Gauss**, 8 divise $(-y-3)$

Donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $-y-3=8k$

Pour tout $k\in\mathbb{Z}$ si $-y-3=8k$, alors:

$8(x-2)=5(-y-3)\Leftrightarrow 8(x-2)=5\times 8k\Leftrightarrow x-2=5k$

Conclusion:

Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $-y-3=8k$ et $x-2=5k$

$\begin{cases} x=5k+2 \\ y=-8k-3 \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$

$\boxed{S=\{(5k+2;-8k-3);k\in\mathbb{Z}\}}$

2. a.

$N=8a+1=5b+2$

$8a-5b=1$

Donc, le couple $\boxed{(a;-b)}$ est **solution de l'équation (E)**

b. $(a;-b)$ est solution de l'équation (E) donc, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que:

$a=5k+2$ et $-b=-8k-3$

Donc:

$N=8(5k+2)+1=40k+17$

$N=5(8k+3)+2=40k+17$

Le reste de la division de N par 40 est **17**.

3. a. On choisit comme solution particulière: (200;-300)

Avec le même raisonnement qu'au 1. b), on obtient comme solution:

$\boxed{S=\{(5K+200;-8K-300);K\in\mathbb{Z}\}}$

b.

On appelle X le nombre d'hommes. $X\in\mathbb{N}$
On appelle Y le nombre de femmes. $Y\in\mathbb{N}$
$8X+5Y=100$
d'après la question précédente:
$X=5K+200$ et $Y=-8K-300$ avec $K\in\mathbb{Z}$

On doit avoir $X\geqslant 0$
$5K+200\geqslant 0$
$K\geqslant -40$

On doit aussi avoir: $Y\geqslant 0$
$-8K-300\geqslant 0$
$K\leqslant -37{,}5$
K est un entier donc $K\leqslant -38$

Conséquence: $-40\leqslant K\leqslant -38$

Pour $K=-40$
$X=0$; $Y=20$: 0 homme; 20 femmes

Pour $K=-39$
$X=5$; $Y=12$: 5 hommes; 12 femmes

Pour $K=-38$
$X=10$; $Y=4$: 10 hommes; 4 femmes

Si on comprend, qu'il y a au moins un homme, il y a 2 possibilités: **5 hommes** et **12 femmes** ou **10 hommes** et **4 femmes**.