Exercice

Dans une auberge, un groupe d'hommes et de femmes moins nombreuses a dépensé 1000 pièces. Les hommes ont payé 19 pièces et les femmes 13 pièces. Combien y avait-il d'hommes et de femmes dans le groupe?

Correction :

On appelle x le nombre d'hommes. $x \in \mathbb{N}$
On appelle y le nombre de femmes. $y \in \mathbb{N}$
$19x+13y=1000$

on pose: $a=19$ et $b=13$

a	b	Quotient	reste
19	13	1	6
13	6	2	1
6	1	6	0

$a=b\times 1+6$ donc: $6=a-b$

$b=6\times 2+1$
$b=(a-b)\times 2+1$
$b=2a-2b+1$ donc: $1=-2a+3b$

On a: $19\times(-2)+13\times 3=1$
Donc: $19\times(-2000)+13\times 3000=1000$
Le couple **(-2000;3000)** est **une solution particulière** de l'équation $19x+13y=1000$.

$19x+13y=1000$
$\Leftrightarrow 19x+13y=19\times(-2000)+13\times 3000$
$\Leftrightarrow 19(x+2000)=13\times(-y+3000)$

19 divise $13(-y+3000)$
$\mathscr{P}$gcd(19;13)=1
D'après **le théorème de Gauss**, 19 divise $(-y+3000)$
Donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $-y+3000=19k$

Pour tout $k\in\mathbb{Z}$ si $-y+3000=19k$, alors:
$19(x+2000)=13(-y+3000)\Leftrightarrow(x+2000)=13\times 19k\Leftrightarrow x+2000=13k$

Conclusion:
Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $-y+3000=19k$ et $x+2000=13k$
$\boxed{\begin{cases} x=13k-2000 \\ y=-19k+3000 \end{cases}}$ $k\in\mathbb{Z}$
On doit aussi avoir $x>y\geqslant 0$ et $x\in\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{N}$

$y \geqslant 0$
$\Leftrightarrow -19k+3000 \geqslant 0$
$\Leftrightarrow -19k \geqslant -3000$
$\Leftrightarrow k \leqslant \frac{3000}{19}$
$\Leftrightarrow k \leqslant 157$

$x > y$
$\Leftrightarrow 13k-2000 > -19k+3000$
$\Leftrightarrow 13k+19k > 2000+3000$
$\Leftrightarrow 32k > 5000$
$\Leftrightarrow k > \frac{5000}{32}$
$\Leftrightarrow k \geqslant 157$

On obtient $k=157$.
$x=13\times157-2000=41$
$y=-19\times157+3000=17$

Il y a **41 hommes** et **17 femmes**.