Exercice Septembre 2003. Guyane-Antilles

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x : $78x^3+ux^2+vx-14=0$ où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).

a. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation: $14u+39v=1129$.
b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x;y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x+39y=1$.
Vérifier que le couple $(-25;9)$ est solution de cette équation.
c. En déduire un couple $(u_0;v_0)$ solution particulière de l'équation $14u+39v=1129$.
Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u;v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.
d. Déterminer, parmi les couples $(u;v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.
2. a. Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.
En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.
b. Soit $\frac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x : $78x^3+ux^2+vx-14=0$ où u et v sont des entiers relatifs.
Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.
c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

Correction :

1. a.

$\frac{14}{39}$ est solution de l'équation (1), donc:

$78\times\frac{14^3}{39^3}+u\times\frac{14^2}{39^2}+v\times\frac{14}{39}-14=0$

$2\times\frac{14^3}{39^2}+u\times\frac{14^2}{39^2}+v\times\frac{14}{39}-14=0$

$2\times14^3+u\times14^2+v\times14\times39-14\times39^2=0$

$2\times14^2+u\times14+v\times39-39^2=0$

$\boxed{14u+39v=1129}$

b.

a	b	Quotient	reste
39	14	2	11
14	11	1	3
11	3	3	2
3	2	1	1
2	1	2	0

$a=b\times2+11$ donc: $11=a-2b$

$b=11\times1+3$

$b=(a-2b)\times1+3$

$b=a-2b+3$ donc: $3=-a+3b$

$11=3\times3+2$

$a-2b=(-a+3b)\times3+2$

$a-2b=-3a+9b+2$ donc: $2=4a-11b$

$3=2\times1+1$

$-a+3b=(4a-11b)\times1+1$

$-a+3b=4a-11b+1$ donc: $1=-5a+14b$

On a: $39\times(-5)+14\times14=1$

$14\times14+39\times(-5)=1$

Donc:

Le couple **(14;-5)** est **une solution particulière** de l'équation $14x+39y=1$.

$14\times(-25)+39\times9=1$

Donc:
Le couple **(-25;9)** est **une solution particulière** de l'équation $14x+39y=1$.

c.
Le couple (14;-5) est une solution particulière de l'équation $14x+39y=1$.

$14\times 1129=15806$

$-5\times 1129=-5645$

Donc:

Le couple (15806;-5645) est une solution particulière de l'équation $14x+39y=1129$.

Le couple (-25;9) est une autre solution particulière de l'équation $14x+39y=1$.

$-25\times 1129=-28225$

$9\times 1129=10161$

Donc:

Le couple (-28225;10161) est une autre solution particulière de l'équation $14x+39y=1129$.

$14u+39v=1129$

$\Leftrightarrow 14u+39v=14u_0+39v_0$

$\Leftrightarrow 14(u-u_0)=39\times(-v+v_0)$

14 divise $39(-v+v_0)$

$\mathscr{P}$gcd(14;39)=1

D'après le théorème de Gauss, 14 divise $(-v+v_0)$

Donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $(-v+v_0)=14k$

Pour tout $k\in\mathbb{Z}$ si $-v+v_0=14k$, alors:

$14(u-u_0)=39\times(-v+v_0)\Leftrightarrow 14(u-u_0)=39\times 14k\Leftrightarrow u-u_0=39k$

Conclusion:

Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $u-u_0=39k$ et $-v+v_0=14k$

$\boxed{\begin{cases} u=39k+u_0 \\ v=-14k+v_0 \end{cases}}$ $k\in\mathbb{Z}$

d.
Si $u_0=15806$ et $v_0=-5645$

$15806=39\times 405+11$
$u=39k+39\times 405+11$
$u=39(k+405)+11$

Pour $k=-405$, on obtient $u=11$

On a alors:
$v=-14\times(-405)-5645$
$v=5670-5645$

$v=25$
On obtient le couple (11;45)

Si $u_0=-28225$ et $v_0=10161$

$-28225=39\times(-724)+11$
$u=39k+39\times(-724)+11$
$u=39(k-724)+11$

Pour $k=724$, on obtient $u=11$

On a alors:
$v=-14\times(724)+10161$
$v=-10136+10161$
$v=25$
On obtient aussi le couple (11;45)

2. a.

78	2
39	3
13	13
1	

$78=2\times3\times13$ Il y a $2\times2\times2=8$ diviseurs de 78 dans $\mathbb{N}$
D_{78}={1;2;3;6;13;26;39;78}

14	2
7	7
1	

$14=2\times7$ Il y a $2\times2=4$ diviseurs de 14 dans $\mathbb{N}$
D_{14}={1;2;7;14}

b.
$\frac{P}{Q}$ est solution de l'équation (1), donc:
$78\times\frac{P^3}{Q^3}+u\times\frac{P^2}{Q^2}+v\times\frac{P}{Q}-14=0$
$78\times P^3+uQ\times P^2+vQ^2\times P-14\times Q^3=0$ (2)
$78P^3=Q(-uP^2-vPQ+14Q^2)$

$(-uP^2-vPQ+14Q^2)\in\mathbb{Z}$
$\mathscr{P}$gcd$(P;Q)=1$ donc $\mathscr{P}$gcd$(P^3;Q)=1$

Q divise $78P^3$

$\mathscr{P}$gcd$(P^3;Q)=1$

D'après le théorème de Gauss: Q divise 78

De même, d'après l'expression (2), on a:
$78\times P^3+uQ\times P^2+vQ^2\times P-14\times Q^3=0$
$14Q^3=P(78P^2+uQP+vQ^2)$

P divise $14Q^3$

$\mathscr{P}$gcd(P;Q^3)=1

D'après le théorème de Gauss: P divise 14

c.
On rappelle que:

$D_{14}=\{1;2;7;14\}$ et $D_{78}=\{1;2;3;6;13;26;39;78\}$

- Si $P=1$ alors tout diviseur de 78 est premier avec P. Pour Q, il y a 7 possibilités. (on exclue $Q=1$ pour lequel on obtient l'entier 1). On a donc: $\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{1}{13};\frac{1}{26};\frac{1}{39};\frac{1}{78}$
- Si $P=2$ alors pour Q il faut choisir un diviseur de 78 impair et différent de 1. Il y a 3 possibilités. On a donc: $\frac{2}{3};\frac{2}{13};\frac{2}{39}$
- Si $P=7$ alors tout diviseur de 78 est premier avec P. Pour Q, il y a 7 possibilités. (on exclue $Q=1$ pour lequel on obtient l'entier 1). On a donc: $\frac{7}{2};\frac{7}{3};\frac{7}{6};\frac{7}{13};\frac{7}{26};\frac{7}{39};\frac{7}{78}$
- Si $P=14$ alors pour Q il faut choisir un diviseur de 78 impair et différent de 1. Il y a 3 possibilités. On a donc: $\frac{14}{3};\frac{14}{13};\frac{14}{39}$

On a donc 20 rationnels positifs, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1). (Il y a aussi 20 rationnels négatifs)

