

Exercice

On considère les matrices de dimension 3×3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. En utilisant une calculatrice ou un logiciel, calculer :

$$E = A \times B \quad \text{et} \quad F = E \times C$$

$$G = B \times C \quad \text{et} \quad H = A \times G$$

Que vérifie-t-on ?

2. Calculer :

$$L = A + B \quad \text{et} \quad M = L \times C$$

$$N = A \times C \quad \text{et} \quad P = B \times C$$

$$Q = N + P$$

Que vérifie-t-on ?

3. Calculer :

$$R = A \times B \quad \text{et} \quad S = B \times A$$

Que remarque-t-on ?

Correction :

$$1 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = AxB \quad E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 7 & 0 & -2 \\ -7 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$F = ExC \quad F = \begin{pmatrix} -10 & -11 & 17 \\ -12 & 23 & -11 \\ 26 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$G = BxC \quad G = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 8 \\ -8 & 1 & 3 \\ 2 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$H = AxG \quad H = \begin{pmatrix} -10 & -11 & 17 \\ -12 & 23 & -11 \\ 26 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$F = H \quad \text{donc} \quad (AxB)xC = Ax(BxC)$$

$$2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L=A+B \quad L = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M=LxC \quad M = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 7 \\ -7 & -2 & 9 \\ -4 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

$$N=AxC \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 1 & -3 & 6 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P=BxC \quad P = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 8 \\ -8 & 1 & 3 \\ 2 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$Q=N+P \quad Q = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 7 \\ -7 & -2 & 9 \\ -4 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

$$M=Q \quad (A+B)x C=AxC+BxC$$

$$3 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$R = A \times B \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 7 & 0 & -2 \\ -7 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$S = B \times A \quad S = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 10 \\ 9 & 0 & -1 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R \neq S \quad \text{donc} \quad A \times B \neq B \times A$$