

Exercice

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

1. En utilisant la calculatrice ou un logiciel, calculer M^2 ; M^3 ; M^4 ; M^5 ; ...
Quelles conjectures peut-on faire pour M^{2k} ($k \in \mathbb{N}^*$) et M^{2k+1} ($k \in \mathbb{N}$)
2. Démontrer ces conjectures en utilisant un raisonnement par récurrence.

Correction :

1.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$M^5 = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 18 & -9 \end{pmatrix}$$

On peut conjecturer pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$M^{2k} = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

$$M^{2k+1} = \begin{pmatrix} 3^k & 3^k \\ 2 \cdot 3^k & -3^k \end{pmatrix} = 3^k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 3^k \times M$$

2. a) On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel non nul k ,

$$M^{2k} = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

Initialisation :

$$\text{Pour } k=1, M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^1 & 0 \\ 0 & 3^1 \end{pmatrix}$$

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier naturel non nul k , $M^{2k} = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$ et on doit démontrer que

$$M^{2(k+1)} = \begin{pmatrix} 3^{k+1} & 0 \\ 0 & 3^{k+1} \end{pmatrix}$$

$$M^{2(k+1)} = M^{2k+2} = M^{2k} \times M^2$$

$$M^{2(k+1)} = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{k+1} & 0 \\ 0 & 3^{k+1} \end{pmatrix}$$

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel non nul k , $M^{2k} = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$

b) On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel k ,

$$M^{2k+1} = \begin{pmatrix} 3^k & 3^k \\ 2 \cdot 3^k & -3^k \end{pmatrix}$$

Initialisation :

$$\text{Pour } k=0, M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^0 & 3^0 \\ 2 \cdot 3^0 & -3^0 \end{pmatrix}$$

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier naturel k , $M^{2k+1} = \begin{pmatrix} 3^k & 3^k \\ 2 \cdot 3^k & -3^k \end{pmatrix}$ et on doit démontrer que

$$M^{2(k+1)+1} = \begin{pmatrix} 3^{k+1} & 3^{k+1} \\ 2 \cdot 3^{k+1} & -3^{k+1} \end{pmatrix}$$

$$M^{2(k+1)+1} = M^{2k+3} = M^{2k+1} \times M^2$$

$$M^{2(k+1)} = \begin{pmatrix} 3^k & 3^k \\ 2 \cdot 3^k & -3^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{k+1} & 3^{k+1} \\ 2 \cdot 3^{k+1} & -3^{k+1} \end{pmatrix}$$

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel k , $M^{2k+1} = \begin{pmatrix} 3^k & 3^k \\ 2 \cdot 3^k & -3^k \end{pmatrix}$