

Exercice

On considère les matrices de dimension 2×2 suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = D + T$$

1. Pour tout entier naturel non nul k , calculer D^k et T^k .

2. Développer : $(D+T) \times (D+T)$

Calculer D^2 ; $T \times D$; $D \times T$

En déduire A^2

3. Pour tout entier naturel non nul k , montrer que :

$$A^k = \begin{pmatrix} 4^k & a_k \\ 0 & 5^k \end{pmatrix} \text{ avec } a_k \text{ nombre réel}$$

et déduire une relation de récurrence liant a_{k+1} et a_k .

4. On pose pour tout entier naturel non nul k : $b_k = 4^k + a_k$

Démontrer que (b_k) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme. En déduire l'expression de a_k en fonction de k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Correction :

1.

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad D^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \quad D^3 = \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 125 \end{pmatrix}$$

On conjecture que pour tout entier naturel non nul k :

$$D^k = \begin{pmatrix} 4^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement ce résultat en effectuant un raisonnement par récurrence.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 :

$$T^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. (D+T) \times (D+T) = D \times D + T \times D + D \times T + T \times T$$

Attention, la multiplication des matrices n'étant pas commutative, on n'a pas nécessairement $T \times D = D \times T$

$$T \times D = E = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D \times T = F = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 4^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}$$

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = D + T \text{ donc } A^2 = (D + T) \times (D + T) = D^2 + E + E + T^2$$

$$\text{Donc, } A^2 = \begin{pmatrix} 4^2 & 9 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}$$

3. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul k , il existe a_k tel que $A^k = \begin{pmatrix} 4^k & a_k \\ 0 & 5^k \end{pmatrix}$ (et on veut déterminer une relation liant a_{k+1} et a_k).

Initialisation :

$$A^1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ donc } a_1 = 1$$

La propriété est vérifiée pour $k=1$.

Hérédité :

On suppose qu'il existe un nombre réel a_k pour k entier naturel non nul tel que $A^k = \begin{pmatrix} 4^k & a_k \\ 0 & 5^k \end{pmatrix}$ et on doit montrer qu'il existe un nombre réel a_{k+1} tel que $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 4^{k+1} & a_{k+1} \\ 0 & 5^{k+1} \end{pmatrix}$.

$$A^{k+1} = A^k \times A$$

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 4^k & a_k \\ 0 & 5^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 4^{k+1} & 4^k + 5a_k \\ 0 & 5^{k+1} \end{pmatrix}$$

C'est à dire, il existe $a_{k+1} = 4^k + 5a_k$ tel que $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 4^{k+1} & a_{k+1} \\ 0 & 5^{k+1} \end{pmatrix}$

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel k non nul, la propriété est vérifiée.

4. Pour tout entier naturel non nul k , on pose $b_k = 4^k + a_k$

On a :

$$b_{k+1} = 4^{k+1} + a_{k+1} = 4^{k+1} + 4^k + 5a_k$$

$$b_{k+1} = 4^k(4+1) + 5a_k$$

$$b_{k+1} = 5(4^k + a_k)$$

$$\boxed{b_{k+1} = 5b_k}$$

$$b_1 = 4^1 + a_1 = 4 + 1 = 5$$

Donc, (b_k) est **la suite géométrique** de premier terme $b_1 = 5$ et de **raison** 5.

Donc, pour tout entier naturel non nul k , $\boxed{b^k = 5^k}$

$$\text{Et, } b_k = 4^k + a_k$$

$$5^k = 4^k + a_k$$

$$\boxed{a_k = 5^k - 4^k}$$