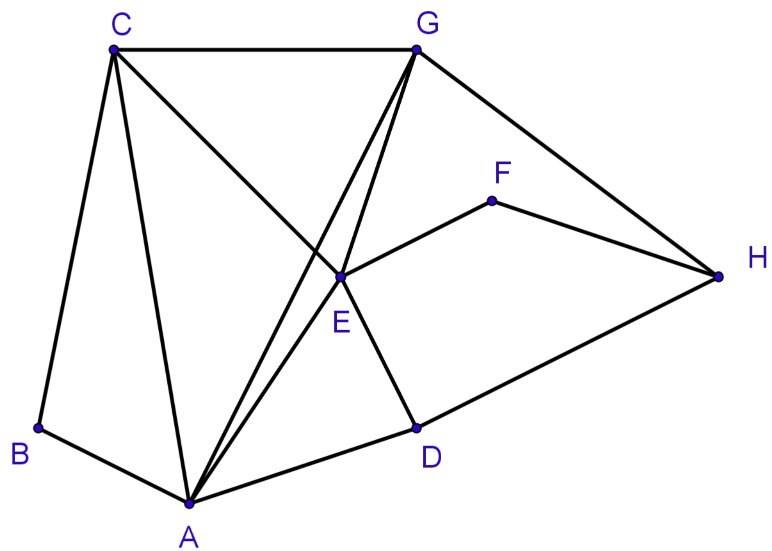
Exercice

On considère le graphe $\mathscr{G}$ suivant :



1. On numérote les sommets de 1 à 8 en respectant l'ordre alphabétique. Déterminer M la matrice associée au graphe $\mathscr{G}$.
2. Démontrer qu'il existe exactement 72 chemins de longueur 3 reliant E aux huit autres sommets.

Correction :

A:1 ; B:2 ; C:3 ; D:4 ; E:5 ; F:6 ; G:7 ; H:8

$\mathrm{M}=(m_{ij})$ est la matrice associée au graphe $\mathcal{G}$.

$m_{ij}=1$ s'il existe une arête reliant i à j sinon $m_{ij}=0$.

Exemples :

$m_{11}=0$ $m_{12}=1$ $m_{13}=1$ $m_{14}=1$ $m_{15}=1$ $m_{16}=0$ $m_{17}=1$ $m_{18}=0$

On obtient :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. En utilisant une calculatrice, on obtient :

$$M^3=\begin{pmatrix} 10 & 8 & 11 & 10 & 12 & 5 & 13 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 3 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 11 & 7 & 8 & 6 & 12 & 3 & 10 & 5 \\ 10 & 3 & 6 & 2 & 11 & 1 & 4 & 8 \\ 12 & 5 & 12 & 11 & 8 & 8 & 13 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 8 & 0 & 2 & 6 \\ 13 & 4 & 10 & 4 & 13 & 2 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{M}^3=(m'_{ij})$

avec m'_{ij} est le nombre de chemins de longueur 3 reliant i à j .

E:5

m'_{5j} est le nombre de chemins de longueur 3 reliant 5 à j .

Le nombre N de chemins de longueur 3 reliant 5 aux 8 autres nombres est :

$\mathrm{N}=m'_{51}+m'_{52}+m'_{53}+m'_{54}+m'_{55}+m'_{56}+m'_{57}+m'_{58}$

On obtient en regardant M^3

$\mathrm{N}=12+5+12+11+8+8+13+3=72$