Compléments : calcul matriciel

1. Écriture matricielle d'un système linéaire et résolution d'un système

1.1. Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

(S) $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ $a;b;c;a';b';c'$ sont des nombres réels donnés.

x et y sont les inconnues.

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$

$\boxed{(s) \Leftrightarrow \mathrm{A.X=Y}}$

$\mathrm{A.X=Y}$ **est la notation matricielle du système (S)**

Remarque :

On peut aussi noter :

$A'=\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$ $X'=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ $Y'=\begin{pmatrix} c & c' \end{pmatrix}$

$\boxed{(s) \Leftrightarrow \mathrm{X'.A'=Y'}}$

1.2. Matrices inversibles de dimension 2*2

a) Remarque

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $a;b;c;d$ sont des nombres réels.

$B=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\mathrm{A \times B = C} = (c_{ij})$

$c_{11}=ad-bc$ $c_{12}=-ab+ab=0$

$c_{21}=dc-dc=0$ $c_{22}=-bc+ad$

$C=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=(ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On vérifie de même que $\mathrm{B \times A = C}$.

b) Conséquence

Si $ad-bc \neq 0$ alors on pose $\mathrm{D}=\frac{1}{ad-bc}.\mathrm{B}$ et $\mathrm{A \times D = D \times A = I}$

Donc A est **inversible** et D est son inverse : $\boxed{\mathrm{D=A^{-1}}}$

c) Théorème

La matrice carrée de dimension 2*2 : $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est **inversible** si et seulement si $\boxed{ad-bc\neq 0}$. Son inverse est alors égal $\boxed{\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}}$.

On nomme **déterminant** de la matrice A le nombre réel $ad-bc$.

1.3. Résolution du système de deux équations du premier degré à deux inconnues

a) $(s)\Leftrightarrow \mathrm{A}.\mathrm{X}=\mathrm{Y}$

Si le déterminant de A est non nul, alors :

$$\mathrm{A}^{-1}\times(\mathrm{A}\times\mathrm{X})=\mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{Y}$$

$$(\mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{A})\times\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{Y}$$

$$\mathrm{I}\times\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{Y}$$

$$\boxed{\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{Y}}$$

b) Exemple

(S) $\begin{cases} 5x-2y=3 \\ 8x+2y=1 \end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$ad-bc=10+16=26$$

A est inversible et $A^{-1}=\frac{1}{26}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{26}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{26}\begin{pmatrix} 6+2 \\ -24+5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{26}\begin{pmatrix} 8 \\ -19 \end{pmatrix}$$

Donc, $\boxed{x=\frac{8}{26}=\frac{4}{13}}$ et $\boxed{y=-\frac{19}{26}}$.

c) Remarques

- Si on considère : $A'=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad X'=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ $\quad Y'=\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$

  Alors, $X'\times A'=Y' \Leftrightarrow X'=Y'\times A'^{-1}$

  Avec, $A'^{-1}=\frac{1}{26}\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et on obtient le résultat.
- Les calculatrices et les logiciels de calcul formel donnent souvent des valeurs approchées des coefficients de A^{-1}. C'est pour cela qu'il faut connaître le calcul de A^{-1} pour avoir les valeurs exactes.

1.4. Système de trois équations à trois inconnues

(S) $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$ $\quad a;b;c;a';b';c';a'';b'';c''$ sont des nombres réels donnés.

x ; y et z sont les inconnues.

$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ $\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad Y=\begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix}$

$\boxed{(s)\Leftrightarrow A.X=Y}$

$A.X=Y$ **est la notation matricielle du système (S)**

Remarque :

On peut aussi noter :

$A'=\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ $\quad X'=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ $\quad Y'=\begin{pmatrix} d & d' & d'' \end{pmatrix}$

$\boxed{(s)\Leftrightarrow X'.A'=Y'}$

1.5. Résolution du système de trois équations du premier degré à trois inconnues

$(s)\Leftrightarrow A.X=Y$

Si A est inversible (aucun calcul n'est au programme de TS) alors l'inverse de A est donné par l'utilisation d'une calculatrice ou d'un logiciel.

Exemple

$$\begin{cases} 5x+2y-4z=-1,4 \\ 3x-4y-4z=-1,2 \\ -x-2y+2z=2,2 \end{cases}$$

$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} -1,4 \\ -1,2 \\ 2,2 \end{pmatrix}$

En utilisant le logiciel géogébra, on trouve que A est inversible et $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0,36 & -0,09 & 0,55 \\ 0,05 & -0,14 & -0,18 \\ 0,23 & -0,18 & 0,59 \end{pmatrix}$

$\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{Y}$

$X=\begin{pmatrix} 0,8 \\ -0,3 \\ 1,2 \end{pmatrix}$

x=0,8 y=-0,3 z=1,2

1.6. Généralisation

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$\mathrm{A}=(a_{ij})$ est une matrice carrée de dimension $n\times n$.

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

$x_1 \dots x_n$ sont les inconnues.

$y_1 \dots y_n$ sont des réels donnés.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_1 n x_n=y_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_2 n x_n=y_2 \\ a_n 1 x_1+a_n 2 x_2+\dots+a_{nn}x_n=y_n \end{cases}$$

$\boxed{(s)\Leftrightarrow \mathrm{A}.\mathrm{X}=\mathrm{Y}}$

Si A est inversible alors $\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{Y}$

2. Suites de matrices colonnes vérifiant Un+1=A*Un+B et de matrices lignes Vn+1=Vn*A'+B'

2.1. Rappel suites numériques

a) a et b sont deux nombres donnés et $a\neq 0$ et $a\neq 1$

(u_n) est la suite définie par son 1[er] termu u_0 et pour tout entier naturel n :

$u_{n+1}=au_n+b$

$u_1=au_0+b$

$u_2=au_1+b=a(au_0+b)+b=a^2u_0+ab+b$

$u_2=a^2u_0+(a+1)b$

$u_3=a(u_2+b)=a(a^2u_0+ab+b)+b$

$u_3=a^3+a^2b+ab+b$

$u_3=a^3u_0+(a^2+a+1)b$

On conjecture pour tout nombre entier naturel non nul n :

$u_n=a_0^{nu}+(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1)b$

(On peut démontrer ce résultat en effectuant un raisonnement par récurrence)

$1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}$ est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison a !;

$1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}=\dfrac{1-a^n}{1-a}$

Et, $u_n=a^nu_0+\dfrac{1-a^n}{1-a}.b$

Si $-1<a<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n$ =0, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{b}{1-a}$

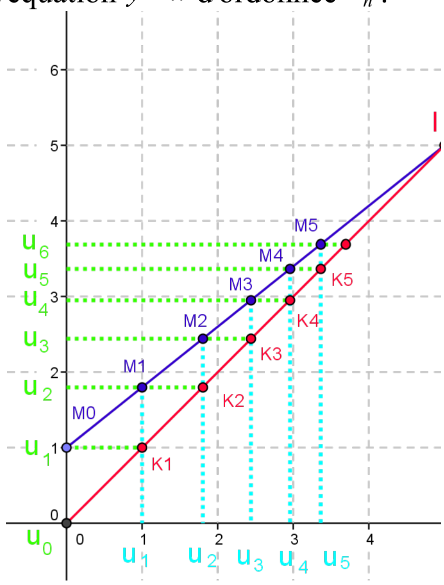
<u>Remarque :</u>

$a\times\dfrac{b}{1-a}+b=\dfrac{ab+b-ab}{1-a}=\dfrac{b}{1-a}$

Si on pose $l=\dfrac{b}{1-a}$ alors $l=al+b$

b) <u>Exemple</u>

(u_n) est la suite définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}8u_n+1$ ($a=0{,}8$ et $b=1$).
Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=0{,}8x+1$
D est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{\mathrm{i}};\vec{\mathrm{j}})$.
$f(u_n)=u_{n+1}$ Donc u_{n+1} est l'ordonnée du Point M_n d'abscisse u_n . (M_n est un point de D).
$\mathrm{K}_n(u_n;u_n)$ est le point de la droite Δ d'équation $y=x$ d'ordonnée u_n .



On conjecture que la suite (u_n) converge vers l'abscisse (ou l'ordonnée) du point I des droites D et Δ

$\begin{cases} y=0{,}8x+1 \\ y=x \end{cases}$

Donc, $x=0{,}8x+1$

$0{,}2x=1$

$x=\frac{1}{0{,}2}=5$

I(5;5)

On considère la suite (v_n) telle que pour tout entier naturel n : $v_n=u_n-5$.

$v_{n+1}=5-u_{n+1}$

$v_{n+1}=5-(0{,}8u_n+1)$

$v_{n+1}=5-0{,}8(5-v_n)-1$

$v_{n+1}=5-4+0{,}8v-n-1$

$v_{n+1}=0{,}8v_n$

Donc, (v_n) est **la suite géométrique** de **premier terme** $v_0=5$ et de **raison** 0,8.

Pour tout entier naturel n :

$v_n=v_0\times 0{,}8^n$

$v_n=5\times 0{,}8^n$

$-1<0{,}8<1$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n=$ **0**.

Or, $u_n=5-v_n$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} u_n=$ **5**.

2.2. Suites de matrices colonnes ou suites de matrices lignes

p est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

A et A' sont des matrices carrées de dimension $p\times p$.

n est un entier naturel.

(U_n) est une suite de matrices colonnes de p lignes.

(V_n) est une suite de matrices lignes de p colonnes.

B est une matrice colonne de p lignes

B' est une matrice ligne de p colonnes.

(U_n) est définie par son premier terme U_0 et pour tout entier naturel n : $\mathrm{U}_{n+1}=\mathrm{AU}_n+\mathrm{B}$

(V_n) est définie par son premier terme V_0 et pour tout entier naturel n : $\mathrm{V}_{n+1}=\mathrm{VA'}_n+\mathrm{B'}$

a) On suppose savoir calculer : A^k ou A'^k pour tout entier naturel k (on pose $\mathrm{A}^0=\mathrm{A}'^0=\mathrm{I}$)

$\mathrm{U}_1=\mathrm{AU}_0+\mathrm{B}$

$\mathrm{U}_2=\mathrm{A}(\mathrm{A}\,\mathrm{U}_0+\mathrm{B})+\mathrm{B}$

$\mathrm{U}_2=\mathrm{A}^2\mathrm{U}_0+\mathrm{AB}+\mathrm{B}$

$\mathrm{U}_2=\mathrm{A}^2\mathrm{U}_0+\mathrm{AB}+\mathrm{B}$

$U_2=A^2U_0+(A+I)B$

$U_3=AU_2+B$

$U_3=A(A^2U_0+(A+I)B)+B$

$U_3=A^3U_0+(A^2+A)B+B$

$U_3=A^3U_0+(A^2+A+I)B$

On conjecture que pour tout entier naturel n :

$U_n=A^n U-0+(A^{n-1}+A^{n-2}+\ldots+A+I)B$

$$\boxed{U_n=A^nU_0+\left(\sum_{k=0}^{n-1}A^k\right)B}$$

On peut vérifier ce résultat en effectuant un raisonnement par récurrence.

Remarque : on démontre de même que :

$$\boxed{V_n=V_0A'^n+B'\left(\sum_{k=0}^{n-1}A'^k\right)}$$

b) Exercice

$$A=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & 1\\ 0 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel non nul k , on a :

$A^k=\begin{pmatrix}a_k & b_k\\ c_k & d_k\end{pmatrix}$ avec $a_k=\left(\frac{3}{4}\right)^k$; $b_k=\left(\frac{3}{4}\right)^k-\left(-\frac{1}{4}\right)^k$; $c_k=0$; $d_k=\left(-\frac{1}{4}\right)^k$.

En déduire : $\lim\limits_{k\to+\infty}A^k$

2. Soit n un entier naturel non nul fixé.

Calculer en fonction de n , $\sum\limits_{k=0}^{n-1}A^k$.

En déduire, $\lim\limits_{k\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}A^k$

3. On considère la suite (U_n) de matrices colonnes à 2 lignes définies par $U_0=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1}=AU_n+B$ avec $B=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

1. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul k , on a :

$A^k=\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$ avec $a_k=\left(\frac{3}{4}\right)^k$; $b_k=\left(\frac{3}{4}\right)^k-\left(-\frac{1}{4}\right)^k$; $c_k=0$; $d_k=\left(-\frac{1}{4}\right)^k$.

Initialisation :

Pour $k=1$, $a_1=\frac{3}{4}$; $b-1=\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)=1$; $c_1=0$ et $d_1=-\frac{1}{4}$.

$A^1=A$

La propriété est vérifiée pour $k=1$.

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier k tel que $A^k=\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$ avec $a_k=\left(\frac{3}{4}\right)^k$; $b_k=\left(\frac{3}{4}\right)^k-\left(-\frac{1}{4}\right)^k$; $c_k=0$; $d_k=\left(-\frac{1}{4}\right)^k$.

$A^{k+1}=A^k\times A$

$$a_{k+1}=a_k\times\frac{3}{4}+b_k\times 0=\left(\frac{3}{4}\right)^k\times\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$$

$$b_{k+1}=a_k\times 1+b_k\times\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$b_{k+1}=\left(\frac{3}{4}\right)^k+\left(-\frac{1}{4}\right)\left[\left(\frac{3}{4}\right)^k-\left(-\frac{1}{4}\right)^k\right]$$

$$b_{k+1}=\left(\frac{3}{4}\right)^k-\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^k-\left(-\frac{1}{4}\right)^{k+1}$$

$$b_{k+1}=\left(\frac{3}{4}\right)^k\left[1-\frac{1}{4}\right]-\left(-\frac{1}{4}\right)^{k+1}$$

$$b_{k+1}=\left(\frac{3}{4}\right)^k\times\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{k+1}$$

$$b_{k+1}=\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{k+1}$$

$$c_{k+1}=\frac{3}{4}\times c_k+0\times d_k=0$$

$$d_{k+1}=1\times c_k+\left(-\frac{1}{4}\right)\times d_k$$

$$d_{k+1}=1\times 0+\left(-\frac{1}{4}\right)\times\left(-\frac{1}{4}\right)^k$$

$$d_{k+1}=\left(-\frac{1}{4}\right)^{k+1}$$

L'hérédité est vérifiée

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, nous pouvons affirmer que la propriété est vérifiée pour tout entier naturel non nul k .

$a_k=\left(\frac{3}{4}\right)^k$ $\quad -1<\frac{3}{4}<1$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k=\mathbf{0}$

$b_k=\left(\frac{3}{4}\right)^k-\left(-\frac{1}{4}\right)^k$ $\quad -1<\frac{3}{4}<1$ et $-1<-\frac{1}{4}<1$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k=\mathbf{0}$ et donc $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k=\mathbf{0}$

$c_k=0$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} c_k=\mathbf{0}$

$d_k=\left(-\frac{1}{4}\right)^k$ $\quad \lim\limits_{k\to+\infty} d_k=\mathbf{0}$

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} A^k=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$

2. $S_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{A}^k=\begin{pmatrix}q_{n-1} & r_{n-1}\\ s_{n-1} & t_{n-1}\end{pmatrix}$

$$q_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}a_k=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k=\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}=\frac{4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{4-3}=4-4\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$t_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}d_k=\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{4}\right)^k=\frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4\left(1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)}{4+1}=\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

$$s_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}c_k=0$$

$$r_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}b_k=q_{n-1}-t_{n-1}=4-4\times\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^n=\frac{16}{5}-4\times\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} q_{n-1}=\mathbf{4}$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} r_{n-1}=\mathbf{16/5}$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} s_{n-1}=\mathbf{0}$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} t_{n-1}=\mathbf{4/5}$

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{16}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

3. $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $U_{n+1} = AU_n + B$

Donc, $U_n = A^n U_0 + S_{n-1} B$

$$U_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + S_{n-1} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

L'écriture de U_n en fonction de n est fastidieuse et dans l'énoncé, on ne demande que $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} A^n U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{16}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \textit{ et } \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} B = \begin{pmatrix} 4 & \frac{16}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

et, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}}$

<u>Remarque 1 :</u>

On pose $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$A\,X + B = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Donc, $\boxed{AX + B = X}$

<u>Remarque 2 :</u>

On peut considérer un exercice similaire en utilisant des matrices lignes.

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$V_{n+1} = V_n A' + B'$$

$$A'^k = \begin{pmatrix} a_k & c_k \\ b_k & d_k \end{pmatrix} \text{ avec } a_k = \left(\frac{3}{4}\right)^k \; ; \; b_k = \left(\frac{3}{4}\right)^k - \left(-\frac{1}{4}\right)^k \; ; \; c_k = 0 \; ; \; d_k = \left(-\frac{1}{4}\right)^k .$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}}$$

On note $X'=\begin{pmatrix}4 & 4\end{pmatrix}$

$\boxed{X'=X'A'+B'}$

c) Avec les mêmes notations que pour le a) :

$U_{n+1}=AU_n+B$ ou $V_{n+1}=VA'_n+B'$

On suppose savoir calculer : A^k ou A'^k pour tout entier naturel k .

On suppose connaître X une matrice colonne à p lignes ou X' une matrice ligne à p colonnes telles que :

$X=AX+B$ ou $X'=X'A'+B'$

Donc, pour tout entier naturel n :

$U_{n+1}-X=A(U_n-X)$

$U_1-X=A(U_0-X)$

$U_2-X=A(U_1-X)=A^2(U_0-X)$

On conjecture :

$U_n-X=A^n(U_0-X)$

$\boxed{U_n=A^n(U_0-X)+X}$

On vérifie facilement cette conjecture en effectuant un raisonnement par recurrrence.

De même :

$\boxed{V_n=(V_0-X')A'^n+X'}$

d) <u>Exercice</u>

$U_0\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ $\quad A=\begin{pmatrix}5 & -6\\1 & 0\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}-16\\-4\end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel non nul n :

$A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\c_n & d_n\end{pmatrix}$ avec $a_n=3^{n+1}-2^{n+1}$; $b_n=3\times2^{n+1}-2\times3^{n+1}$; $c_n=3^n-2^n$; $d_n=3\times2^n-2\times3^n$.

(On peut vérifier ces résultats en effectuant un raisonnement par récurrence. On proposera un calcul de ces résultats dans les exercices)

$X=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$. Vérifier que X=AX+B et calculer U_n en fonction de n .

$AX+B=\begin{pmatrix}20\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-16\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ =X

Donc,

$U_n=A^n(U_0-X)$

$U_n=A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 3^n - 2^n \end{pmatrix}}$$

3. Graphes probabilistes

3.1. Introduction

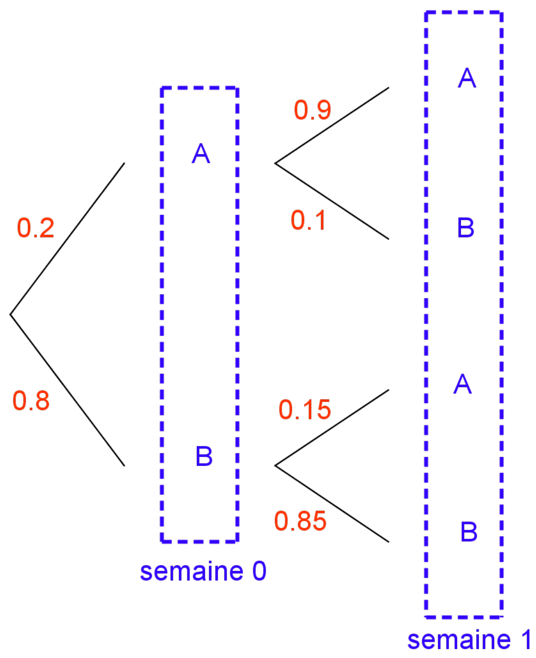
a) Exemple 1

Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale.Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité.L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires.Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.
Au début de la campagne, 20% des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale. Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10% des personnes préférant Aurore et 15% des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.
La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.
Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère Boréale la semaine n.

Remarques :

- Pour chaque semaine, il y a deux issues : A et B
- On note pour $i \in \mathbb{N}^*$, $P_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \end{pmatrix}$ la loi de probabilité de la i[ème] semaine.

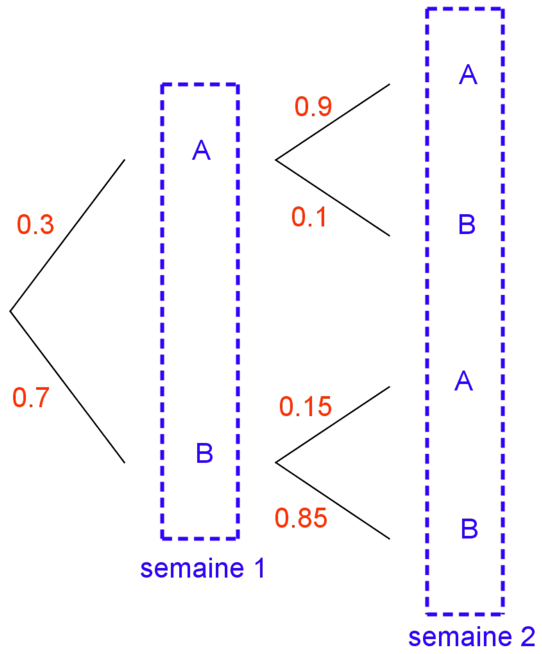
Arbre pondéré :
On a :
$P_A(A)=0,9$ et $P_A(B)=0,1$
$P_B(A)=0,15$ et $P_B(B)=0,85$



$a_0 = 0{,}2$ probabilité **de A à la semaine 0**.
$b_0 = 0{,}8$ probabilité **de B à la semaine 0**.
On note $P_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.
On écrit une matrice à une ligne et deux colonnes.

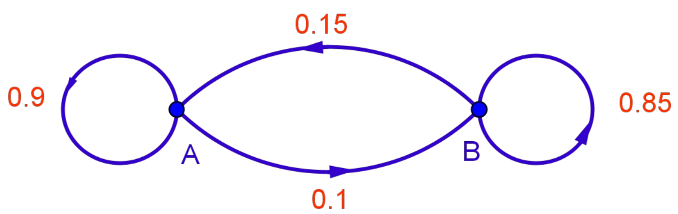
Pour la semaine 1, on calcule a_1 et b_1 en utilisant la formule des probabilités totales (donc en utilisant l'arbre pondéré).
$a_1 = 0{,}2 \times 0{,}9 + 0{,}8 \times 0{,}15 = 0{,}18 + 0{,}12 = 0{,}3$
$b_1 = 0{,}8 \times 0{,}85 + 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}7$
Donc, $P_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

Si on veut déterminer P_2 , on peut **continuer l'arbre précédent** pour la semaine 2 (mais il serait difficile de continuer l'arbre pour la semaine 5 par exemple). On peut aussi connaissant la semaine 1, déterminer la semaine 2 **en modifiant les conditions initiales dans l'arbre pondéré précédent**.



$a_2 = 0{,}3 \times 0{,}9 + 0{,}7 \times 0{,}15 = 0{,}27 + 0{,}105 = 0{,}375$
$b_2 = 0{,}7 \times 0{,}85 + 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}595 + 0{,}03 = 0{,}625$
Donc, $P_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0{,}625 \end{pmatrix}$

Si on veut continuer les calculs, on constate que la partie droite est constante. On peut remplacer l'arbre pondéré par **un graphe orienté** et **pondéré de sommets A et B**.



Le poids de l'arête AA (boucle en A) est 0,9=$P_A(A)$.
Le poids de l'arête AB est 0,1=$P_A(B)$.
La somme des poids des arêtes issues de A est égale à 1 (0,9+0,1=1).

Le poids de l'arête BB (boucle en B) est 0,85=$P_B(B)$.
Le poids de l'arête BA est 0,15=$P_B(A)$.
La somme des poids des arêtes issues de B est égale à 1 (0,85+0,15=1).

On considère la matrice M carrée de dimension 2×2 .

$M=\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$

m_{ij} i :ligne et j :colonne

m_{11} est le poids de l'arête AA : **0,9**.

m_{12} est le poids de l'arête AB : **0,1**.

m_{21} est le poids de l'arête BA : **0,15**.

m_{22} est le poids de l'arête BB : **0,85**.

On a $P_0=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

On calcule $P_0 M$.

$P_0 M=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$

$P_0 M=\begin{pmatrix} 0{,}2\times 0{,}9+0{,}8\times 0{,}15 & 0{,}2\times 0{,}1+0{,}8\times 0{,}85 \end{pmatrix}$

$P_0 M=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}=P_1$

On calcule $P_1 M$.

$P_1 M=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$

$P_1 M=\begin{pmatrix} 0{,}3\times 0{,}9+0{,}7\times 0{,}15 & 0{,}3\times 0{,}1+0{,}7\times 0{,}85 \end{pmatrix}$

$P_1 M=\begin{pmatrix} 0{,}375 & 0{,}625 \end{pmatrix}=P_2$

b) Exemple 2

Pour se rendre à son travail, Mathurin rencontre une succession de feux tricolores dont le fonctionnement est décrit ci-dessous :

A chaque intersection :

- Si le feu est vert, il le sera à l'intersection suivante avec une probabilité 0,9 ou sera rouge avec la probabilité 0,05.
- Si le feu est orange, il le sera à l'intersection suivante avec une probabilité 0,1 ou sera vert avec la probabilité 0,8.
- Si le feu est rouge, il le sera à l'intersection suivante avec une probabilité 0,5 ou sera orange avec la probabilité 0,05.

n étant un entier naturel non nul, on note :

- V_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu vert à la $n-$ième intersection
- O_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu orange à la $n-$ième intersection
- R_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu rouge à la $n-$ième intersection
- $P_n=\begin{pmatrix} V_n & O_n & R_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste du $n-$ième feu tricolore

1. a) Construire un graphe probabiliste pour décrire cette situation.

b) Donner la matrice M complétée de ce graphe :

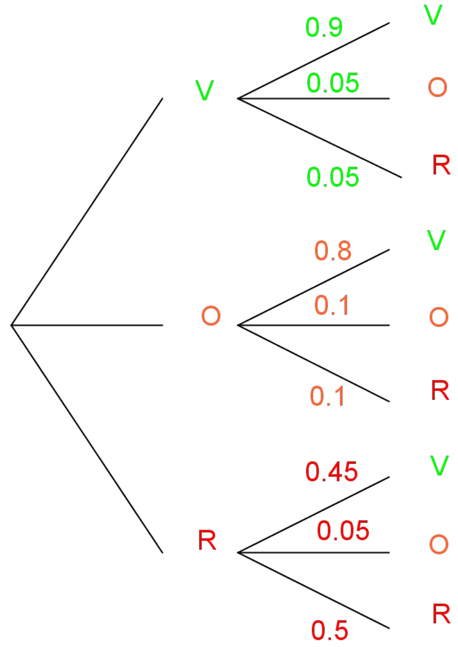
$$M=\begin{pmatrix} ... & 0,05 & 0,05 \\ 0,8 & ... & 0,1 \\ 0,45 & ... & 0,5 \end{pmatrix}$$

2. a) Si le premier feu rencontré est vert, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2 .

b) On donne $P_3=\begin{pmatrix}0,87 & 0,05 & 0,08\end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que le quatrième feu soit vert ?

3. Si le premier feu rencontré est rouge, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2 .

1. Si on considère un arbre pondéré pour passer d'un feu tricolore au suivant, la partie droite de l'arbre est constante.

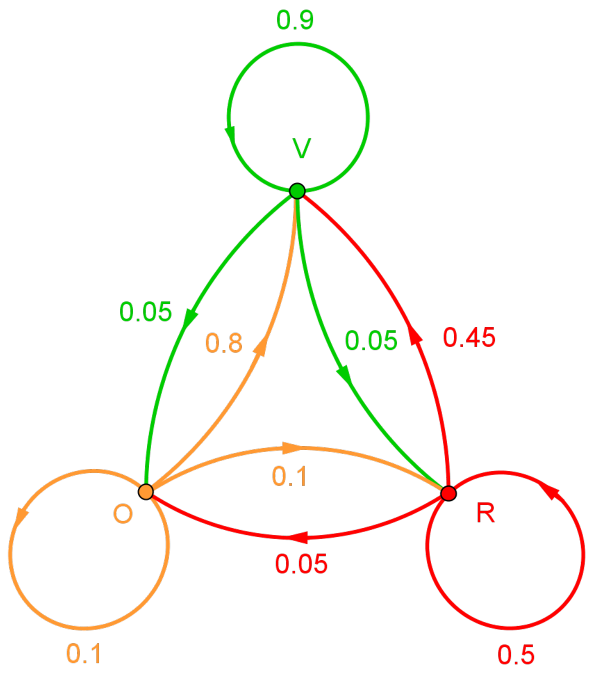


On donne $P_V(V)$=0,9 et $P_V(R)$=0,05 donc $P_V(O)=1-P_V(V)-P_V(R)$=1-0,9-0,05=**0,05**.

On donne $P_O(V)$=0,8 et $P_O(O)$=0,1 donc $P_O(R)=1-P_O(V)-P_O(O)$=1-0,8-0,1=**0,1**.

On donne $P_R(R)$=0,5 et $P_R(O)$=0,05 donc $P_R(V)=1-P_R(O)-P_R(R)$=1-0,5-0,05=**0,45**.

Puis on trace **le graphe** de sommets V ; O et R (dans cet ordre) **orienté et pondéré** suivant (que l'on appelle graphe probabiliste).



1. b) On considère la matrice M carrée de dimension 3×3 (V ; O et R (dans cet ordre)).

m_{ij} i :ligne et j :colonne
m_{11} est le poids de l'arête VV : **0,9**.
m_{12} est le poids de l'arête VO : **0,05**.
m_{13} est le poids de l'arête VR : **0,05**.
m_{21} est le poids de l'arête OV : **0,8**.
m_{22} est le poids de l'arête OO : **0,1**.

m_{23} est le poids de l'arête OR : **0,1**.

m_{31} est le poids de l'arête RV : **0,45**.
m_{32} est le poids de l'arête RO : **0,05**.
m_{33} est le poids de l'arête RR : **0,5**.

Donc, $M=\begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,45 & 0,05 & 0,5 \end{pmatrix}$

2. a) Si le premier feu rencontré est vert, alors :

$V_1=1$ $O_1=0$ $R_1=0$

Donc, $P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_2=P_1M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,45 & 0,05 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$P_2=P_1M=\begin{pmatrix} 1\times0,9+0\times0,8+0\times0,45 & 1\times0,05+0\times0,1+0\times0,05 & 1\times0,05+0\times0,1+0\times0,5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{P_2 = P_1 M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \end{pmatrix}}$

2. b) $P_3 = \begin{pmatrix} 0,87 & 0,05 & 0,08 \end{pmatrix}$

$P_4 = P_3 M$

$P_4 = \begin{pmatrix} \mathrm{V}_4 & \mathrm{O}_4 & \mathrm{R}_4 \end{pmatrix}$

$\mathrm{V}_4 = 0,87 \times 0,9 + 0,05 \times 0,8 + 0,08 \times 0,45$

$\mathrm{V}_4 = 0,783 + 0,04 + 0,36$

$\boxed{\mathrm{V}_4 = 0,859}$

3. Si le premier feu rencontré est rouge alors :

$\mathrm{R}_1 = 1 \qquad \mathrm{O}_1 = \mathrm{V}_1 = 0$

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_2 = P_1 M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,45 & 0,05 & 0,5 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$\boxed{P_2 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,05 & 0,5 \end{pmatrix}}$

3.2. Définitions

a) **Un graphe probabiliste** est un graphe orienté pondéré tel que le poids de chaque arête est un nombre réel de l'intervalle [0;1] et la somme des poids des arêtes sortant de chaque sommet est égale à 1.

b) Les **sommets du graphe** sont les différents **états du système**. Le poids d'une arête est la probabilité conditionnelle de passer d'un état à l'autre.

c) Un **état probabiliste** d'un système est une **loi de probabilité** sur l'ensemble des états possibles de ce système. Cette loi de probabilité est représentée par **une matrice ligne**.

3.3. Matrice de transition

a) Définition

On précise l'ordre des sommets (ou des états).

La matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre n est la matrice M dont les coefficients m_{ij} (i : ligne, j : colonne) sont **les poids des arêtes** joignant le $i^{ème}$ sommet au $j^{ème}$ sommet, s'il n'existe pas d'arête reliant ces deux sommets alors $m_{ij} = 0$.

b) Propriété

P_0 est l'état probabiliste initial et pour $k \in \mathbb{N}$, P_k est l'état probabiliste après k répétitions de l'expérience décrite pour le graphe probabiliste.

On a :

$\boxed{P_{k+1} = P_k M}$ et $\boxed{P_k = P_0 M^k}$

3.4. État stable

On considère un graphe probabiliste d'ordre 2.

a) Définition

On dit qu'un état probabiliste P est **stable** s'il reste **invariant dans la répétition de l'expérience** décrite par le graphe probabiliste de matrice de transition M c'est à dire P=PM.

b) Propriété (admise)

Dans le cas d'un graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition M ne comporte pas de zéro, l'état probabiliste P_n ($n \in \mathbb{N}$)**converge toujours** vers l'état stable **P**, vérifiant **PM=P** indépendant de l'état initial P_0 .

c) Remarque

Pour calculer P, on pose $P = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}$ $x \in [0;1]$

Et, on résout : $\begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}$