Exercice

1. $A=\begin{pmatrix}5 & -6\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

a) On pose $X=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Déterminer $Y_1=AX$.

Écrire Y_1 en fonction de X, puis calculer $Y_n=A^nX$ (n entier naturel non nul).

b) On pose $X'=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Déterminer $Y'_1=AX'$.

Écrire Y'_1 en fonction de X', puis calculer $Y'_n=A^nX'$ (n entier naturel non nul).

c) On pose : $A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$.

En écrivant : $A^nX=Y_n$ et $A^nX'=Y'_n$, en déduire 2 systèmes d'équations du premier degré à 2 inconnues permettant de calculer les quatre coefficients : $a_n;b_n;c_n;d_n$.

<u>Remarque :</u>
Les matrices X et X' ne sont pas choisies au hasard, ce sont des matrices associées « aux valeurs propres 2 et 3 » de la matrice A. (la détermination des valeurs propres d'une matrice de dimension 2×2 n'est pas au programme de TS)

2. On considère la suite numérique (u_n) définie par ses 2 premiers termes : $u_0=0$ et $u_1=1$ et la relation de occurrence pour tout entier naturel n :
$u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n$

Soit (X_n) la suite de matrices colonnes à 2 lignes définies par $X_n=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_n\end{pmatrix}$

a) Vérifier que $X_{n+1}=AX_n$
b) Calculer l'expression de u_n en fonction de n.

Correction :

1. a) $Y_1 = AX$

$Y_1 = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Y_1 = \begin{pmatrix} 10-6 \\ 2+0 \end{pmatrix}$

$Y_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$Y_1 = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc, **$Y_1 = 2X$**

$Y_2 = A^2X$
$Y_2 = A(AX)$
$Y_2 = A\,Y_1$
$Y_2 = 2\,AX$
$Y_2 = 2\,Y_1$
$Y_2 = 4\,X$
$Y_2 = 2^2\,X$

On conjecture pour tout entier naturel n non nul :

$Y_n = 2^nX$

$Y_n = 2^n\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{Y_n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ 2^n \end{pmatrix}}$

On peut vérifier ce résultat en effectuant un raisonnement par récurrence.

b)

$Y'_1 = AX'$

$Y_1 = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Y'_1 = \begin{pmatrix} 15-6 \\ 3+0 \end{pmatrix}$

$Y'_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

$Y'_1 = 3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc, **$Y'_1 = 3X'$**

$Y'_2 = A^2X'$
$Y'_2 = A(AX')$
$Y'_2 = A\,Y'_1$
$Y'_2 = 3\,AX'$
$Y'_2 = 3\,Y'_1$
$Y'_2 = 9\,X'$
$Y'_2 = 3^2\,X'$

On conjecture pour tout entier naturel n non nul :

$Y'_n=3^nX'$

$$Y'_n=3^n\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{Y'_n=\begin{pmatrix}3^{n+1}\\3^n\end{pmatrix}}$$

On peut vérifier ce résultat en effectuant un raisonnement par récurrence.

c) $A^nX=Y_n$

$$\begin{pmatrix}a_n & b_n\\c_n & d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1}\\2^n\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2a_n+b_n=2^{n+1}\\2c_n+d_n=2^n\end{cases}$$

$A^nX'=Y'_n$

$$\begin{pmatrix}a_n & b_n\\c_n & d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^{n+1}\\3^n\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}3a_n+b_n=3^{n+1}\\3c_n+d_n=3^n\end{cases}$$

$$\begin{cases}2a_n+b_n=2^{n+1}\\3a_n+b_n=3^{n+1}\end{cases}$$

Donc, **$a_n=3^{n+1}-2^{n+1}$.**

$b_n=3.2^{n+1}-2.3^{n+1}$.

$$\begin{cases}2c_n+d_n=2^n\\3c_n+d_n=3^n\end{cases}$$

Donc, **$c_n=3^n-2^n$.**

$d_n=3.2^n-2.3^n$.

2. a)

$$AX_n=\begin{pmatrix}5 & -6\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_n\end{pmatrix}$$

$$AX_n=\begin{pmatrix}5u_{n+1}-6u_n\\u_{n+1}\end{pmatrix}$$

$$AX_n=\begin{pmatrix}u_{n+2}\\u_{n+1}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{AX_n=X_{n+1}}$$

b) Donc, $X_n=A^nX_0$ avec $X_0=\begin{pmatrix}u_1\\u_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$X_n=A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$X_n=\begin{pmatrix}a_n\\c_n\end{pmatrix}$$

$$X_n=\begin{pmatrix}3^{n+1}-2^{n+1}\\3^n-2^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_n\end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel n : **$u_n=3^n-2^n$.**