Exercice

M. et Mme Martin, qui habitent une grand ville, aiment beaucoup voyager. Ils prévoient toujours de partir pendant l'été, soit à l'étranger, soit de visiter une région en France.
S'ils sont restés en France une année donnée, la probabilité qu'ils partent à l'étranger l'année suivante est de 0,4.
Par contre, s'ils sont partis à l'étranger une année donnée, la probabilité qu'ils retournent à l'étranger l'année suivante est de 0,7.
En été 2009, ce couple est parti à l'étranger.
Pour tout entier naturel n, on note P_n la matrice ligne $(a_n\ b_n)$ traduisant l'état probabiliste l'année (2009+n), où a_n désigne la probabilité que ce couple soit resté en France l'année (2009+n) et b_n la probabilité que ce couple soit parti à l'étranger l'année (2009+n).

Partie A

1. a. Traduire les données par un graphe probabiliste dont les sommets seront notés F et E (F pour France et E pour étranger).

b. En déduire la matrice de transition en prenant tout d'abord F puis E pour l'ordre des sommets. On notera M cette matrice.

2. a. Donner P_0, l'état probabiliste initial, l'année 2009.

b. On donne les résultats suivants :

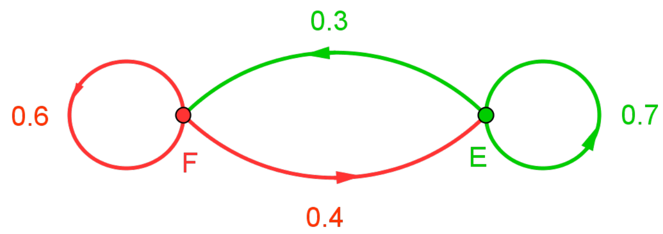
$$M^2=\begin{pmatrix}0{,}48 & 0{,}52\\ 0{,}39 & 0{,}61\end{pmatrix} \quad M^3=\begin{pmatrix}0{,}444 & 0{,}556\\ 0{,}417 & 0{,}583\end{pmatrix} \quad M^4=\begin{pmatrix}0{,}4332 & 0{,}5668\\ 0{,}4251 & 0{,}5749\end{pmatrix}$$

En choisissant la bonne matrice, calculer P_3. En déduire la probabilité que ce couple parte à l'étranger en 2012 *(On donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième)*.

3. Soit P la matrice ligne $(x\ y)$ donnant l'état stable où x et y sont deux réels positifs tels que $x + y = 1$.
Déterminer l'état stable puis interpréter le résultat.

Correction :
Cet exercice a été posé en TES. Comme l'indique l'énoncé, on utilise les matrices lignes et non les matrices colonnes.

1. a) Il y a 2 états : F et E
$P_F(E)=$**0,4** donc $P_F(F)=1-0,4=$**0,6**
$P_E(E)=$**0,7** donc $P_E(F)=1-0,7=$**0,3**
D'où le graphe probabiliste :



b) L'ordre des sommets est : F puis E.
M est la matrice de transition (dans le cas d'utilisation des **matrices lignes**)
m_{11}=poids de l'arête FF=**0,6**
m_{12}=poids de l'arête FE=**0,4**
m_{21}=poids de l'arête EF=**0,3**
m_{22}=poids de l'arête EE=**0,7**
$$M=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\ 0,3 & 0,7\end{pmatrix}$$

M' est la matrice de transition (dans le cas d'utilisation des **matrices colonnes**)
m'_{11}=poids de l'arête FF=**0,6**
m'_{12}=poids de l'arête EF=**0,3**
m'_{21}=poids de l'arête FE=**0,4**
m'_{22}=poids de l'arête EE=**0,7**
$$M'=\begin{pmatrix}0,6 & 0,3\\ 0,4 & 0,7\end{pmatrix}$$
On dit que la matrice M' est la matrice transposée de M.

2. a) En 2009, ce couple est parti à l'étranger donc $b_0=$**1** et $a_0=$**0**

Donc, $\boxed{P_0=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}}$

b) $P_3=P_0\times M^3$
$$P_3=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,444 & 0,556\\ 0,417 & 0,583\end{pmatrix}$$
$\boxed{P_3=\begin{pmatrix}0,42 & 0,58\end{pmatrix}}$

3. $P(x \quad y)$ $\quad x>0$ et $y>0$ et $x+y=1$
Pour l'état stable, on a : $y=1-x$ et $P=P\times M$

$$\begin{pmatrix}x & 1-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 1-x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\ 0,3 & 0,7\end{pmatrix}$$
$$\begin{cases}0,6x+0,3(1-x)=x\\ 0,4x+0,7(1-x)=1-x\end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}3=(1+0{,}3-0{,}6)\,x \\ (0{,}4+1-0{,}7)\,x=\ 1-0{,}7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}3=0{,}7\,x \\ 0{,}7\,x=\ 0{,}3 \end{cases}$$

$x=\dfrac{0{,}3}{0{,}7}=\dfrac{3}{7}\approx 0{,}43$ et $y=1-x\approx 0{,}57$

$\boxed{P=\begin{pmatrix}0{,}43 & 0{,}57\end{pmatrix}}$

Dans plusieurs années, la probabilité pour le couple de **partir à l'étranger** sera **0,57** et celle de **rester en France** est de **0,43**.