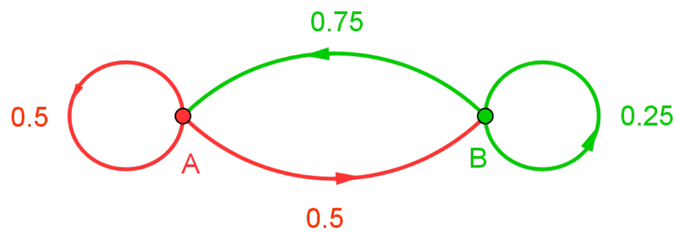
Exercice marche aléatoire entre A et B

A chaque étape, Monsieur X peut marcher de A vers B ou de B vers A ou rester en A ou rester en B avec les probabilités données par le graphe probabiliste suivant :



On utilise les matrices colonnes.
1. Écrire la matrice de transition M de ce graphe. On choisit l'ordre A puis B.

2. On suppose qu'au départ, Monsieur X se trouve en A, c'est à dire $c_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

a) Calculer la probabilité que Monsieur X soit en B en 2 étapes (en utilisant un arbre ou la formule des probabilités totales)

b) Calculer M² et retrouver le résultat.

3. On suppose qu'au départ monsieur X se trouve en B.
Calculer M^3 et déterminer la probabilité que monsieur X se trouve en B en trois étapes.

Correction :

1. $m_{11}=P_A(A)=$**0,5**

$m_{12}=P_B(A)=$**0,75**

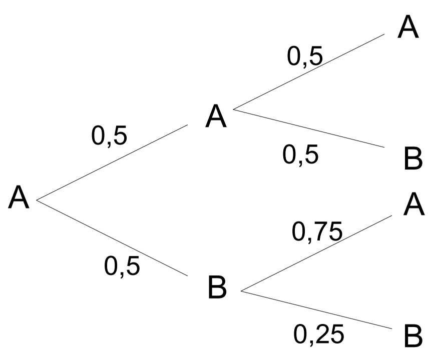
$m_{21}=P_A(B)=$**0,5**

$m_{22}=P_B(B)=$**0,25**

$$M=\begin{pmatrix}0,5 & 0,75\\ 0,5 & 0,25\end{pmatrix}$$

On note $p_1(A)$ la probabilité que monsieur X soit en A en une étape ; $p_1(B)$ la probabilité que monsieur X soit en B en une étape ; $p_2(A)$ la probabilité que monsieur X soit en A en deux étapes ; $p_2(B)$ la probabilité que monsieur X soit en B en deux étapes.

2. a)



$P_2(B)=0{,}5\times 0{,}5+0{,}5\times 0{,}25=$ **0,375**

D'après la formule des probabilités totales :

$P_2(B)=P_A(A)\times P_A(B)+P_A(B)\times P_B(B)=$ **0,375**

b) $C_0=\begin{pmatrix} P_0(A) \\ P_0(B) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$C_1=\begin{pmatrix} P_1(A) \\ P_1(B) \end{pmatrix}=M\,C_0$

$C_2=\begin{pmatrix} P_2(A) \\ P_2(B) \end{pmatrix}=M^2 C_0$

En utilisant géogébra, on obtient :

$M^2=\begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}5625 \\ 0{,}375 & 0{,}4375 \end{pmatrix}$

Donc,

$C_2=\begin{pmatrix} 0{,}625 \\ 0{,}375 \end{pmatrix}$

Ainsi, $P_2(B)=$ **0,375**

3. On note $C'_0 = \begin{pmatrix} P'_0(A) \\ P'_0(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$C'_3 = \begin{pmatrix} P'_3(A) \\ P'_3(B) \end{pmatrix} = M^3 C'_0$

$M^3 = \begin{pmatrix} 0{,}59375 & 0{,}609375 \\ 0{,}40625 & 0{,}390625 \end{pmatrix}$

Donc,

$C'_3 = \begin{pmatrix} 0{,}609375 \\ 0{,}390625 \end{pmatrix}$

Ainsi, $P'_3(B)$ =**0,390625**

(en général, on ne conserve que 2 ou 3 décimales)