Exercice

On considère 2 urnes I et II et 2 boules. A chaque étape du processus, on tire une boule de l'une des deux urnes au hasard que l'on place dans l'autre urne.
Au départ, les deux boules sont dans l'urne I.
1. Déterminer l'ensemble des répartitions (ou états) possibles. On classera les résultats dans l'ordre inverse du nombre de boules dans l'urne I et on notera : A ; B et C.

2. Les tirages sont équiprobables. Déterminer un graphe probabiliste décrivant les étapes du processus. Ecrire une matrice de transition T. (on utilisera les matrices colonnes).

3. Calculer T^2 et T^3 . En déduire une écriture de T^n selon la parité de n .

4. Au départ, les deux urnes sont dans l'urne I, écrire C_0 et C_n pour tout entier naturel non nul n .

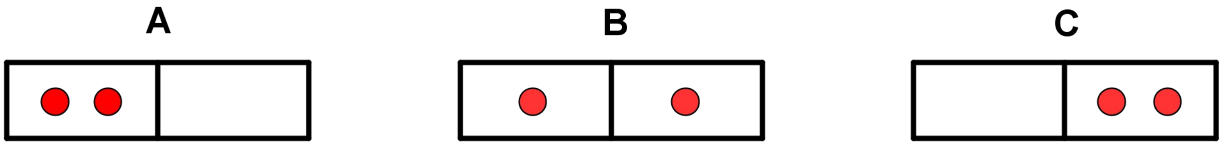
5. Démontrer que la probabilité de revenir pour la première fois à l'état initial en 6 étapes est $\frac{1}{8}$.

Correction :

1. Il y a 3 répartitions possibles :

- 2 boules dans I et 0 boule dans II
- 1 boule dans I et 1 boule dans II
- 0 boule dans I et 2 boules dans UU

Sur la figure, l'urne I est représentée à gauche et l'urne II est représentée à droite.



2. Si on part de A, on tire nécessairement une boule de I que l'on place dans II, donc :

$P_A(A) = \underline{0}$ $P_A(B) = \underline{1}$ $P_A(C) = \underline{0}$

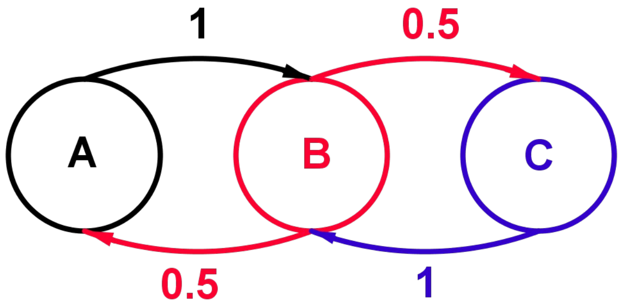
Si on part de B, on choisit au hasard l'une des 2 urnes et on place la boule de cette urne dans l'autre, on obtient alors la répartition A ou la répartition B donc :

$P_B(A) = \underline{0{,}5}$ $P_B(B) = \underline{0}$ $P_B(C) = \underline{0{,}5}$

Si on part de C, on tire nécessairement une boule de II que l'on place dans I, donc :

$P_C(A) = \underline{0}$ $P_C(B) = \underline{1}$ $P_C(C) = \underline{0}$

On obtient le graphe probabiliste suivant :



On utilise les matrices colonnes pour déterminer T.

$m_{11}=P_A(A)$ $m_{12}=P_B(A)$ $m_{13}=P_C(A)$

$m_{21}=P_A(B)$ $m_{22}=P_B(B)$ $m_{23}=P_C(B)$

$m_{31}=P_A(C)$ $m_{32}=P_B(C)$ $m_{33}=P_C(C)$

$$T=\begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $T^2=\begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$ $T^3=\begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$

On obtient **$T^3=T$**

On peut vérifier facilement en utilisant un raisonnement par récurrence que :
$T^{2k+1}=T$ pour $k\in\mathbb{N}$
$T^{2k}=T^2$ pour $k\in\mathbb{N}$

4. Au départ, on se place au résultat A, donc :
$c_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Et, pour tout entier naturel non nul n , $\boxed{c_n=\mathrm{T}^n\times c_0}$
Si $n=2k$ avec $k\in\mathbb{N}^*$ alors **$c_n=c_0$**
Si $n=2k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$ alors **$c_n=c_1$**
$c_1=\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

5. Remarque

Pour tout entier naturel non nul k : $c_{2k}=c_0$ et pour tout entier naturel non nul k : $c_{2k+1}=c_1 \neq c_0$

On peut revenir à l'état initial si et seulement si $n=2k$ avec k entier naturel non nul.

On note $p_n(\text{A})$ la probabilité de revenir à l'état initial en n étapes.

$p_{2k}(\text{A})=0{,}5$ Et $p_{2k+1}(\text{A})=0$.

On a $p_1(\text{A})=0$ et $p_2(\text{A})=0{,}5$ et $p_3(\text{A})=0$ et $p_4(\text{A})=0{,}5$ et $p_5(\text{A})=0$ et $p_6(\text{A})=0{,}5$.

$p_2(\overline{\text{A}})=1-0{,}5=0{,}5=p_4(\overline{\text{A}})$

$p_1(\overline{\text{A}})=p_3(\overline{\text{A}})=p_5(\overline{\text{A}})=1-0=1$

Les étapes sont indépendantes donc on revient à l'état initial pour la première fois en 6 étapes si et seulement si on ne revient pas en A en 2 étapes et on ne revient pas en A en 4 étapes et on revient en A en 6 étapes, donc on obtient pour probabilité :

$$\boxed{1\times 0{,}5\times 1\times 0{,}5\times{,}\times 0{,}5=0{,}125=\frac{1}{8}}$$