Exercice

1. Déterminer le reste de la division euclidienne par 11 du nombre $A=251139^{44}$
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $B=10^{100}+100^{10}$ par 27
3. Démontrer que quel que soit l'entier naturel n le nombre $C=3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7
4. Démontrer que quel que soit l'entier naturel n le nombre $D=3^{n+3}-4^{4n+2}$ est divisible par 11.

Correction :

1.
$251139 = 11 \times 22830 + 9$
$251139 \equiv 9 (11)$
Donc $A \equiv 9^{44} (11)$

$9^2 = 81 = 11 \times 7 + 4$ donc $9^2 \equiv 4 (11)$
$9^3 = 9 \times 9^2 \equiv 9 \times 4 (11)$ donc $9^3 \equiv 36 (11)$. Or $36 = 11 \times 3 + 3$, donc $9^3 \equiv 3 (11)$
$9^4 = 9 \times 9^3 \equiv 9 \times 3 (11)$ donc $9^4 \equiv 27 (11)$. Or $27 = 11 \times 2 + 5$, donc $9^4 \equiv 5 (11)$
$9^5 = 9 \times 9^4 \equiv 9 \times 5 (11)$ donc $9^5 \equiv 45 (11)$. Or $45 = 11 \times 4 + 1$, donc $9^5 \equiv 1 (11)$

$44 = 5 \times 8 + 4$
$9^{44} = 9^{5 \times 8 + 4} = (9^5)^8 \times 9^4$
Par suite,
$9^{44} \equiv 1^8 \times 5 (11)$
$9^{44} \equiv 5 (11)$
Donc, $A \equiv 9^{44} (11)$
Le **reste de la division euclidienne** de A par 11 est **5**.

2.
$10 \equiv 10 (27)$
$10^2 = 100 = 27 \times 3 + 19$ donc $10^2 \equiv 19 (27)$
$10^3 = 10 \times 10^2 \equiv 10 \times 19 (27)$ donc $10^3 \equiv 190 (27)$. Or $190 = 27 \times 7 + 1$, donc $10^3 \equiv 1 (27)$

$100 = 3 \times 33 + 1$
$10^{100} = 10^{3 \times 33 + 1} = (10^3)^{33} \times 10^1$
Par suite,
$10^{100} \equiv 1^{33} \times 10 (27)$
$10^{100} \equiv 10 (27)$

$100^{10} = (10^2)^{10} = 10^{20}$
$20 = 3 \times 6 + 2$
$10^{20} = 10^{3 \times 6 + 2} = (10^3)^6 \times 10^2$
Par suite,
$10^{20} \equiv 1^6 \times 19 (27)$
$100^{10} \equiv 19 (27)$
Donc:
$B = 10^{100} + 100^{10} \equiv 10 + 19 (27)$
$B \equiv 29 (27)$

$29 = 27 \times 1 + 2$

Par suite,
$B \equiv 2 (27)$
Le **reste de la division euclidienne** de B par 27 est **2**.

3.
$3^{2n+1}=(3^2)^n\times 3=9^n\times 3$
$9=7\times 1+2$
$9\equiv 2(7)$
Par suite,
$3^{2n+1}\equiv 2^n\times 3(7)$

$2^{n+2}=2^n\times 2^2$
$2^{n+2}=2^n\times 4$

Donc
$3^{2n+1}+2^{n+2}\equiv 2^n\times 3+2^n\times 4(7)$
$3^{2n+1}+2^{n+2}\equiv 2^n\times(3+4)(7)$
$3^{2n+1}+2^{n+2}\equiv 2^n\times 7(7)$
$3^{2n+1}+2^{n+2}\equiv 0(7)$
$C\equiv 0(7)$
Donc C est **divisible par 7**.

4.
$3^{n+3}=3^n\times 3^3$
$3^3=27=11\times 2+5$
$3^3\equiv 5(11)$
Par suite,
$3^{n+3}\equiv 5\times 3^n(11)$

$4^{4n+2}=(4^4)^n\times 4^2$
$4^2=16=11\times 1+5$
$4^2\equiv 5(11)$

$4^3=4\times 4^2\equiv 4\times 5(11)$
$4^3\equiv 20(11)$
$20=11\times 1+9$
Donc:
$4^3\equiv 9(11)$

$4^4=4\times 4^3\equiv 4\times 9(11)$
$4^4\equiv 36(11)$
$36=11\times 3+3$
Donc:
$4^4\equiv 3(11)$

Donc:
$4^{4n+2}=(4^4)^n\times 4^2\equiv 3^n\times 5(11)$
$D=3^{n+3}-4^{4n+2}\equiv 5\times 3^n-3^n\times 5(11)$
$D\equiv 0(11)$
Donc D **est divisible par 11**.