Exercice

Dans le système décimal, on étudie la divisibilité par 13.
1. Soit un entier naturel n tel que: $n=10a+b$ avec $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$
Prouver que n est divisible par 13 si et seulement si $a+4b$ est divisible par 13.
2. Exemples:
Sans utiliser la calculatrice, déterminer les multiples de 13 parmi les nombres suivants:
140 582; 7 374; 6357

Correction :

1.

- On suppose que $n=10a+b$ est divisible par 13

$10a+b\equiv 0(13)$
$4(10a+b)\equiv 4\times 0(13)$
$40a+4b\equiv 0(13)$
Or, $40=13\times 3+1$
$40\equiv 1(13)$
Donc $a+4b\equiv 0(13)$
$a+4b$ est **divisible par 13**.

- On suppose que $a+4b$ est divisible par 13

$a+4b\equiv 0(13)$
$10(a+4b)\equiv 10\times 0(13)$
$10a+40b\equiv 0(13)$
Or, $40\equiv 1(13)$
$10a+b\equiv 0(13)$
n est **divisible par 13**

2.

On suppose connu les multiples de 13 inférieurs à 100.
$13=1\times 13$ $26=2\times 13$ $39=3\times 13$ $52=4\times 13$ $65=5\times 13$ $78=6\times 13$ $91=7\times 13$

- $n_1=140582=10\times 14058+2$

On pose $a=14058$ et $b=2$
n_1 est divisible par 13 si et seulement si $a+4b$ est divisible par 13.
$a+4b=14066$

$14066=10\times 1406+6$
On pose $a=1406$ et $b=6$
14 066 est divisible par 13 si et seulement si $a+4b$ est divisible par 13.
$a+4b=1430$

$1430=10\times 143+0$
On pose $a=143$ et $b=0$
1430 est divisible par 13 si et seulement si $a+4b$ est divisible par 13.
$a+4b=143$

$143=10\times 14+3$
On pose $a=14$ et $b=3$
143 est divisible par 13 si et seulement si $a+4b$ est divisible par 13.
$a+4b=26$

Or 26 est divisible par 13.
Conclusion: **140 582 est divisible par 13**.

- $n_2=7374=10\times 737+4$

On pose $a=737$ et $b=4$
n_2 est divisible par 13 si et seulement si $a+4b$ est divisible par 13.
$a+4b=753$

$753=10\times 75+3$

On pose $a=75$ et $b=3$
753 est divisible par 13 si et seulement si $a+4b$ est divisible par 13.
$a+4b=87$

Or 87 n'est pas divisible par 13, par conséquent **7 374 n'est pas divisible par 13**.

- $n_3=6357=10\times 635+7$

On pose $a=635$ et $b=7$
n_3 est divisible par 13 si et seulement si $a+4b$ est divisible par 13.
$a+4b=663$

$663=10\times 66+3$

On pose $a=66$ et $b=3$
663 est divisible par 13 si et seulement si $a+4b$ est divisible par 13.
$a+4b=78$

Or 78 est divisible par 13.
Conclusion: **6 357 est divisible par 13**.