Exercice

1. Déterminer les restes de la division euclidienne par 13 de 3^k avec $k \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer les entiers naturels n tels que $A_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$ soit divisible par 13.
3. Les nombres $a = \overline{1110}$; $b = \overline{1010100}$; $c = \overline{1001001000}$ sont écrits dans le système de numération de base 3. Sont-ils divisibles par 13?

Correction :

1.

$3^0 \equiv 1(13)$
$3^1 \equiv 3(13)$
$3^2 \equiv 9(13)$
$3^3 \equiv 1(13)$ car $27=13\times 2+1$

- si $k=3p\ \ p\in\mathbb{N}$, $3^k=3^{3p}=(3^3)^p\equiv 1(13)$
- si $k=3p+1\ \ p\in\mathbb{N}$, $3^k=3^{3p+1}=(3^3)^p\times 3\equiv 3(13)$
- si $k=3p+2\ \ p\in\mathbb{N}$, $3^k=3^{3p+2}=(3^3)^p\times 3^2\equiv 9(13)$

2.

- si $n=3p\ \ p\in\mathbb{N}$, $3^n\equiv 1(13)$
  $3^{2n}=(3^n)^2\equiv 1(13)$
  $3^{3n}=(3^n)^3\equiv 1(13)$
  et, donc $A_n\equiv 3(13)$
- si $n=3p+1\ \ p\in\mathbb{N}$, $3^n=(3^3)^p\times 3^1\equiv 3(13)$
  $3^{2n}=(3^n)^2\times 3^2\equiv 9(13)$
  $3^{3n}=(3^n)^3\times 3^3(13)\equiv 1(13)$
  et, donc $A_n\equiv 3+9+1(13)$
  et, donc $A_n\equiv 0(13)$
- si $n=3p+2\ \ p\in\mathbb{N}$, $3^n=(3^3)^p\times 3^2\equiv 9(13)$
  $3^{2n}=(3^n)^2\equiv 81(13)$ $\quad 81=13\times 6+3$ $\quad 3^{2n}\equiv 3(13)$
  $3^{3n}=(3^n)^3\equiv 9^3(13)$ $\quad 9^3=(3^2)^3=3^6\equiv 1(13)$ $\quad 3^{3n}\equiv 1(13)$
  et, donc $A_n\equiv 9+3+1(13)$
  et, donc $A_n\equiv 0(13)$

Conclusion: A_n est **divisible par 13** si et seulement si $\boxed{n=3p+1}$ ou $\boxed{n=3p+2}$ avec $p\in\mathbb{N}$

3.

- a=$\overline{1110}$

$a=1\times 3^3+1\times 3^2+1\times 3^1+0\times 3^0$
$a=3^1+3^2+3^3$
$a=A_1$

$n=1=3\times 0+1$ donc a est **divisible par 13**.

- b=$\overline{1010100}$

$b=3^2+3^4+3^6$
$b=A_2$

$n=2=3\times 0+2$ donc b est **divisible par 13**.

- c=$\overline{1001001000}$

$b=3^3+3^6+3^9$
$b=A_3$

$n=3$, n ne peut pas s'écrire $3p+1$ ou $n=3p+2$ avec $p\in\mathbb{N}$ donc c **n'est pas divisible par 13**.