

Exercice

Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Correction :

On suppose que l'ensemble des nombres premiers est fini.

On note g le plus grand de tous les nombres premiers.

On classe les nombres premiers dans l'ordre croissant:

$$p_1 < p_2 < \dots < p_k < \dots < g$$

$$p_1 = 2; p_2 = 3; \dots$$

On considère le nombre $N = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times g + 1$, que l'on note $N = (g!) + 1$

N est un entier naturel strictement supérieur à 1 donc N admet au moins un diviseur qui est un nombre premier.

Or pour tout nombre premier p_k , on a: $(g!) \equiv 0 (p_k)$

Par suite, $N \equiv 1 (p_k)$

N n'est donc divisible par aucun nombre premier, il y a contradiction avec le résultat.

Donc l'hypothèse faite est fausse et **l'ensemble des nombres premiers est infini.**