Exercice

1. Soit x un entier relatif.

a) Démontrer que: $3x \equiv 8 (mod\ 10) \Leftrightarrow x \equiv 6 (mod\ 10)$

b) Démontrer que: $x^2 \equiv 6 (mod\ 10) \Leftrightarrow (x \equiv 4 (mod\ 10) \text{ ou } x \equiv 6 (mod\ 10))$

2. Soit n un entier naturel

a) Démontrer que: $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 \equiv 0 (mod\ 10)$ est équivalent à: $(n+1)^2 \equiv 6 (mod\ 10)$

b) En déduire les entiers naturels, multiples de 10 et inférieurs à 5000 qui sont la somme des carrés de trois nombres consécutifs.

Correction :

1.

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3x$	0	3	6	9		$45\equiv 5(10)$	$18\equiv 8(10)$	$21\equiv 1(10)$	$24\equiv 4(10)$	$27\equiv 7(10)$

Il y a **une seule possibilité** pour avoir $3x\equiv 8(10)$ c'est d'avoir $\boxed{x\equiv 6(10)}$

Remarque: on obtient de même $3x\equiv 4(10)\Leftrightarrow x\equiv 8(10)$

Les nombres 3 et 10 étant premiers entre eux, pour chaque valeur de 3*x*, il y aura une et une seule valeur pour *x*.

b)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2	0	1	4	9	$16\equiv 6(10)$	$25\equiv 5(10)$	$36\equiv 6(10)$	$49\equiv 9(10)$	$64\equiv 4(10)$	$81\equiv 1(10)$

Il y a **deux possibilités** et deux seulement d'avoir $x^2\equiv 6(10)$, c'est d'avoir $x\equiv 4(10)$ ou $\boxed{x\equiv 6(10)}$

Donc: $\boxed{x^2\equiv 6(10)\Leftrightarrow (x\equiv 4(10)\text{ou } x\equiv 6(10))}$

Remarque:

on ne peut pas avoir par exemple: $x^2\equiv 7(10)$

2. a)

$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2$

$=n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4$

$=3n^2+6n+5$

$=3(n^2+2n)+5$

$=3[(n+1)^2-1]+5$

$=3(n+1)^2-3+5$

$=3(n+1)^2+2$

$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2\equiv 0(10)$

$\Leftrightarrow 3(n+1)^2+2\equiv 0(10)$

$\Leftrightarrow 3(n+1)^2\equiv -2(10)$ Or $-2=10\times(-1)+8$

$\Leftrightarrow 3(n+1)^2\equiv 8(10)$

$\boxed{\Leftrightarrow (n+1)^2\equiv 6(10)}$ d'après 1. a) b)

D'après 1. b) $(n+1)^2 \equiv 6(10) \Leftrightarrow (n+1 \equiv 4(10) \text{ ou } n+1 \equiv 6(10)) \Leftrightarrow (n \equiv 3(10) \text{ ou } n \equiv 5(10))$

$n=3$ 9+16+25=**50**

$n=5$ 25+36+49=**110**

$n=13$ 169+196+225=**590**

$n=15$ 225+256+289=**770**

$n=23$ 529+576+625=**1730**

$n=25$ 625+676+729=**2030**

$n=33$ 1089+1156+1225=**3470**

$n=35$ 1225+1296+1369=**3890**

$n=43$ 1849+1936+2025=~~**5810**~~