Divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Nombres premiers.

1. La relation divise.. p2
2. Ensemble des diviseurs d'un entier................. p3
3. Ensemble des multiples d'un entier................. p5
4. Définition d'un nombre premier..................... p6
5. Théorème 1.. p6
6. Conséquences... p7
7. Décomposition d'un entier naturel strictement supérieur à 1 en produit de facteurs premiers..... p8
8. Utilisation d'un logiciel................................. p11

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

1. La relation divise

1.1. Définition

Soit a et b deux entiers relatifs. S'il existe un entier relatif k tel que $a=kb$, on dit que a est **un multiple** de b ou que ***b* divise *a*.**

Exemples:

- -4 **divise** 20 car $20=(-5)\times(-4)$. On dit aussi que 20 est **un multiple** de -4.
- 7 **divise** 0 car $0=0\times 7$. On dit aussi que 0 est **un multiple** de 7
- $n\in\mathbb{Z}$
- $n-1$ **divise** n^4-1 car:

$n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)$

$n^4-1=(n-1)(n+1)(n^2+1)$

On dit aussi que n^4-1 est **un multiple** de $n-1$

1.2. Propriétés

$a\in\mathbb{Z}$ 1 **divise** a -1 **divise** a a **divise** a -a **divise** a

$a\in\mathbb{Z}$ $b\in\mathbb{Z}$

*Si a **divise** b et b **divise** a alors a=b ou a=-b*

Tout diviseur d'un diviseur de a est un diviseur de a

$a\in\mathbb{Z}$ $b\in\mathbb{Z}$ $c\in\mathbb{Z}$

Si *c* **divise** *b et b* **divise** *a alors c* **divise** *a*

Exemple:

2 divise 6 et 6 divise 18 donc 2 divise 18

On peut aussi écrire:

$a\in\mathbb{Z}$ $b\in\mathbb{Z}$ $c\in\mathbb{Z}$

Si *b* est **un multiple** *c et a* est **un multiple** *de b alors a* est **un multiple** *de c*

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$a \in \mathbb{Z}$ $b \in \mathbb{Z}$ $c \in \mathbb{Z}$

Si c divise a et b alors c divise $a+b$ et c divise $a-b$

Exemple:

6 divise 24 et 6 divise 18 alors 6 divise 24+18=42 et 6 divise 24-18=6

Si un entier relatif divise deux entiers relatifs alors il divise toute combinaison linéaire de ces nombres.

$a \in \mathbb{Z}$ $b \in \mathbb{Z}$ $c \in \mathbb{Z}$ $\alpha \in \mathbb{Z}$ $\beta \in \mathbb{Z}$

Si c divise a et b alors c divise $\alpha a+\beta b$

Exemple:

3 divise 6 et 21 donc par exemple 3 divise $4\times6+5\times21=81$

2. Ensemble des diviseurs d'un entier

2.1. Notation

$a \in \mathbb{N}$

On note D_a l'ensemble des diviseurs entiers naturels de a.

Exemples:

$D_1=\{1\}$

$D_2=\{1;2\}$

$D_6=\{1;2;3;6\}$

$D_0=\mathbb{N}$

2.2. Propriétés

Pour tout entier naturel a, $1 \in D_a$ et $a \in D_a$

Si $a\neq0$ et si $d \in \mathbb{N}$ est un diviseur de a alors $1\leqslant d\leqslant a$.

Conséquence: l'ensemble des diviseurs de a est fini.

$a \in \mathbb{N}$ $b \in \mathbb{N}$

a divise b $\Leftrightarrow D_a\subset D_b$

Exemple:

3 divise 12 donc $D_3 \subset D_{12}$

$D_3=\{1;3\}$ et $D_{12}=\{1;2;3;4;6;12\}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$a \in \mathbb{N}$ $b \in \mathbb{N}$

$\boxed{a=b \Leftrightarrow D_a=D_b}$

$a \in \mathbb{N}$ $b \in \mathbb{N}$ $d \in \mathbb{N}$

Si d divise a et b alors d divise $a+b$ donc $\boxed{D_d \subset D_{a+b}}$

Si d divise a et b et $a \geqslant b$ alors d divise $a-b$ donc $\boxed{D_d \subset D_{a-b}}$

$a \in \mathbb{N}$ $b \in \mathbb{N}$ $d \in \mathbb{N}$ $\alpha \in \mathbb{Z}$ $\beta \in \mathbb{Z}$

Si d divise a et b et $\alpha a+\beta b \geqslant 0$ alors d divise $\alpha a+\beta b$ donc $\boxed{D_d \subset D_{\alpha a-\beta b}}$

2.3. Ensemble des diviseurs d'un entier relatif

On note $\mathcal{D}_a$ l'ensemble des entiers relatifs diviseur de l'entier relatif a.

Exemples:

$\mathcal{D}_2=\{-2;-1;1;2\}$

$\mathcal{D}_{-6}=\{-6;-3;-2;-1;1;2;3;6\}$

$a \in \mathbb{Z}$

$1 \in \mathcal{D}_a$ $-1 \in \mathcal{D}_a$ $a \in \mathcal{D}_a$ $-a \in \mathcal{D}_a$

$a \in \mathbb{Z}$

$\mathcal{D}_{-a}=\mathcal{D}_a$

$a \in \mathbb{Z}$ $a \neq 0$

$\mathcal{D}_a$ est fini.

$a \in \mathbb{Z}$ $b \in \mathbb{Z}$

a divise $b \Leftrightarrow \mathcal{D}_a \subset \mathcal{D}_b$

$a \in \mathbb{Z}$ $b \in \mathbb{Z}$

$a=b$ ou $a=-b \Leftrightarrow \mathcal{D}_a=\mathcal{D}_b$

$a \in \mathbb{Z}$ $b \in \mathbb{Z}$ $d \in \mathbb{Z}$ $\alpha \in \mathbb{Z}$ $\beta \in \mathbb{Z}$

Si d divise a et b alors d divise $a+b$; d divise $a-b$; d divise $\alpha a+\beta b \geqslant 0$ donc:

$\mathcal{D}_d \subset \mathcal{D}_{a+b}$ $\mathcal{D}_d \subset \mathcal{D}_{a-b}$ $\mathcal{D}_d \subset \mathcal{D}_{\alpha a+\beta b}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

3. Ensemble des multiples d'un entier

3.1. Notation

$a \in \mathbb{N}$

On note M_a *l'ensemble des entiers naturels multiples de l'entier naturel* a.

$M_a=\{ka;\ k \in \mathbb{N}\}$

Exemples:

$M_1=\mathbb{N}$

$M_0=\{0\}$

M_2 est l'ensemble des nombres pairs

Remarque:

Si $a \neq 0$, alors M_a est infini.

3.2. Propriétés

$a \in \mathbb{N}$

$0 \in M_a$ $\quad$ $a \in M_a$

$a \in \mathbb{N}$ $\quad$ $b \in \mathbb{N}$

a *divise* $b \Leftrightarrow M_b \subset M_a$

Exemple:

$M_{12} \subset M_2$

$a \in \mathbb{N}$ $\quad$ $b \in \mathbb{N}$

$a=b \Leftrightarrow \boxed{M_a=M_b}$

3.3. Ensemble des entiers relatifs multiples d'un entier relatif

$a \in \mathbb{Z}$

On note $\mathcal{M}_a$ *l'ensemble des entiers relatifs multiples de l'entier naturel* a.

$\mathcal{M}_a=\{ka;\ k \in \mathbb{Z}\}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$a \in \mathbb{Z}$

$0 \in \mathcal{M}_a$ $a \in \mathcal{M}_a$ $-a \in \mathcal{M}_a$

$a \in \mathbb{Z}$

$\mathcal{M}_a = \mathcal{M}_{-a}$

$a \in \mathbb{Z}$ $b \in \mathbb{Z}$

a **divise** b $\Leftrightarrow \mathcal{M}_b \subset \mathcal{M}_a$

$a \in \mathbb{Z}$ $b \in \mathbb{Z}$

$a=b$ ou $a=-b$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathcal{M}_a = \mathcal{M}_b}$

4. Définition d'un nombre entier

Un entier naturel p est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs entiers naturels distincts: 1 et p.

Autrement dit, un entier naturel p est **premier** si et seulement si $D_p=\{1;p\}$

Remarques:

- $D_2=\{1;2\}$ $D_3=\{1;3\}$ $D_5=\{1;5\}$

Donc 2; 3 et 5 sont premiers.

- $D_0=\mathbb{N}$

Donc 0 n'est pas premier.

- $D_1=\{1\}$

Donc 1 n'est pas premier.

5. Théorèmes

5.1. Théorème 1

Tout entier naturel autre que 1 **admet au moins un diviseur premier**.

Démonstration:

2 divise 0 donc 0 admet au moins un diviseur premier (2).

Soit n un entier naturel distinct de 0 et 1.

D_n contient au moins 2 éléments 1 et n.

Soit p le plus petit diviseur de n strictement supérieur à 1 (p peut être égal à n).

(Exemples:

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$n=6$ $D_6=\{1;2;3;6\}$ $p=2$

$n=7$ $D_7=\{1;7\}$ $p=7$)

$D_p \subset D_n$

Nous allons montrer que p est un nombre premier. Pour cela, nous allons montrer que p possède exactement deux diviseurs entiers naturels distincts 1 et p.

Soit d un diviseur (entier naturel) de p $(p\neq 0)$ $1\leqslant d\leqslant p$

d divise p et p divise n donc d divise n.

$d \in D_n$

Si $d\neq 1$, p est le plus petit diviseur de n strictement supérieur à 1 donc $p\leqslant d$, or $d\leqslant p$; donc $p=d$

Conclusion:

$d=1$ ou $d=p$

Donc p possède exactement deux diviseurs entiers naturels distincts 1 et p donc p est un nombre premier.

5.2. Théorème 2

Tout entier naturel n autre que 0 et 1 et non premier admet **au moins un diviseur premier p** tel que $p^2\leqslant n$.

Démonstration

n n'est pas un nombre premier et $n\neq 0$ et $n\neq 1$

Soit p le plus petit diviseur de n strictement supérieur à 1.

p est un nombre premier donc $p\neq n$.

Il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $n=pq$

$p\neq n$ donc $q\neq 1$

Donc q est un diviseur de n strictement supérieur à 1.

Donc $p\leqslant q$

On multiplie les deux membres de l'inégalité par p, on obtient donc:

$p^2\leqslant pq=n$

6. Conséquences

- Pour trouver un diviseur premier d'un entier naturel n (non premier et distinct de 0 et 1), il suffit de déterminer un diviseur de n parmi les nombres premiers p tel que $p^2\leqslant n$
- Pour démontrer qu'un entier naturel n supérieur ou égal à 2 est premier, il suffit de vérifier que n n'est pas divisible par tous les nombres premiers p tels que $p^2\leqslant n$
- On établit facilement la liste des nombres premiers inférieurs à 100:
  2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97.
- On démontrera dans le chapitre 3 que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Exercice:

Les nombres 701; 733; 3599 sont-ils des nombres premiers?

$\sqrt{701} \approx 26{,}5$

Pour conclure, il suffit de regarder si 701 est divisible ou non par l'un des nombres premiers suivants: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23

On trouve que 701 n'est divisible par aucun de ces nombres premiers donc 701 est un nombre premier.

$\sqrt{733} \approx 27{,}1$

Pour conclure, il suffit de regarder si 733 est divisible ou non par l'un des nombres premiers suivants: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23

On trouve que 733 n'est divisible par aucun de ces nombres premiers donc 733 est un nombre premier.

$\sqrt{3599} \approx 60$

Pour conclure, il suffit de regarder si 3599 est divisible ou non par l'un des nombres premiers suivants: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59

On trouve $3599=59\times 61$

3599 est divisible par 59 donc 3599 n'est pas un nombre premier.

Remarque:

61 est un nombre premier diviseur de 3599 tel que $3599<61^2$ donc lorsque n n'est pas un nombre premier et n distinct de 0 et 1 alors tous les diviseurs premiers p de n ne vérifient pas nécessairement $p^2 \leqslant n$

7. Décomposition d'un entier naturel strictement supérieur à 1 en produit de facteurs premiers

7.1. Propriété

Tout entier naturel n autre que 0 et 1 et non premier peut s'écrire de manière unique sous la forme d'un produit:

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_m^{\alpha_m}$$

où p_1; p_2; …; p_m sont des nombres premiers tels que $0<p_1<\ldots<p_m$

et α_1 ; α_2 ; …; α_m sont des entiers naturels non nuls.

Ce produit se nomme **décomposition en produit de facteurs premiers** de n.

7.2. Exemples

Décomposer 120; 1638; 7429 et 35321 en produit de facteurs premiers.

On divise les nombres successivement par les nombres premiers dans l'ordre croissant.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

120 est divisible par 2: $120=2\times 60$

60 est divisible par 2: $60=2\times 30$

30 est divisible par 2: $30=2\times 15$

15 est divisible par 3: $15=3\times 5$

5 est un nombre premier

On peut présenter de cette façon:

$$\begin{array}{l|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$120=2^3\times 3\times 5$

$$\begin{array}{l|l} 1638 & 2 \\ 819 & 3 \\ 273 & 3 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$1638=2\times 3^2\times 7\times 13$

$$\begin{array}{l|l} 7429 & 17 \\ 437 & 19 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array}$$

$7429=17\times 19\times 23$

$$\begin{array}{l|l} 35321 & 11 \\ 3211 & 13 \\ 247 & 13 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

$35321=11\times 13^2\times 19$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

7.3. Diviseurs d'un entier naturel composé en produit de facteurs premiers

$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_m^{\alpha_m}$

Un entier naturel d est un diviseur de n si et seulement si $d = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots \times p_m^{\beta_m}$

avec β_1 ; β_2 ; …; β_m entiers naturels vérifiant: $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1$; $0 \leqslant \beta_2 \leqslant \alpha_2$; … ; $0 \leqslant \beta_m \leqslant \alpha_m$

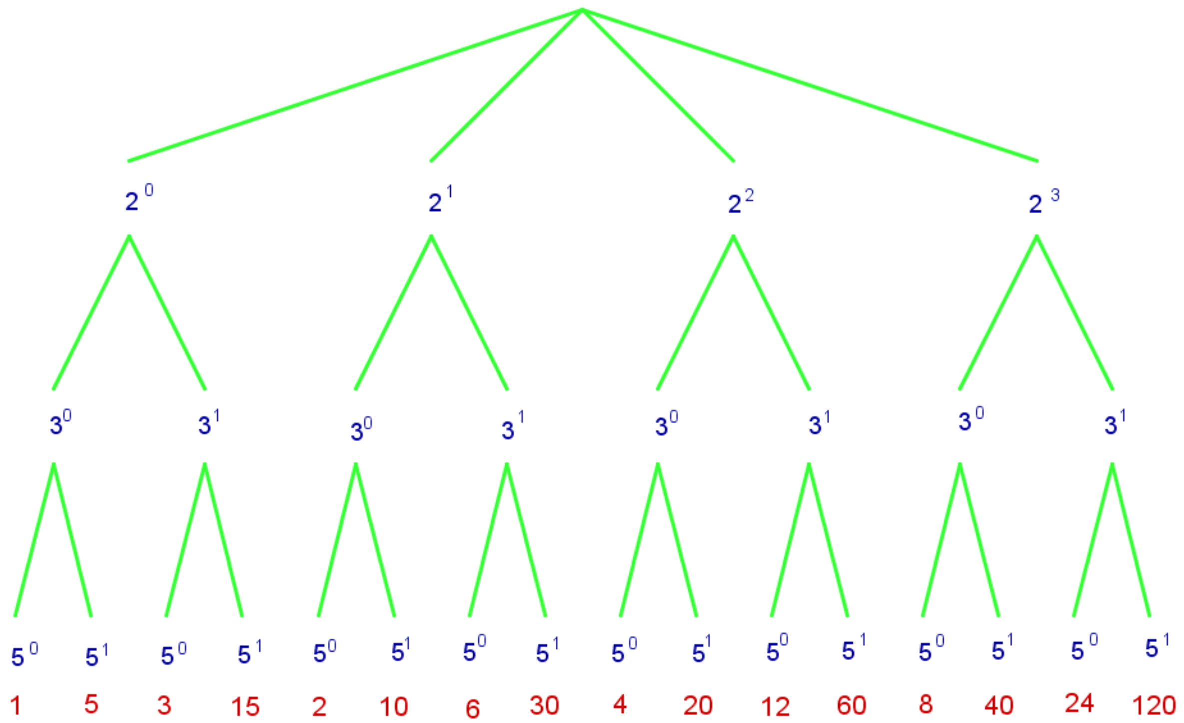
On obtient la décomposition en produit de facteurs premiers de d en supprimant dans le produit précédent les facteurs dont l'exposant est zéro (remarque: si tous les exposants sont nuls, on obtient alors 1 que l'on ne peut pas décomposer en produit de facteurs premiers)

7.4. Exercice

Déterminer l'ensemble des diviseurs de 120.

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$

Pour obtenir tous les diviseurs de 120, on considère l'arbre suivant:



Les diviseurs ne sont pas obtenus dans l'ordre croissant.

Il y a $4 \times 2 \times 2 = 16$ diviseurs de 120

$D_{120} = \{1;2;3;4;5;6;8;10;12;15;20;24;30;40;60;120\}$

<u>Remarque:</u>

$S = (2^0+2^1+2^2+2^3)(3^0+3^1)(5^0+5^1)$

Chaque terme du développement est un diviseur de 120 et chaque diviseur de 120 est un terme du développement.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

S est donc la somme des diviseurs de 120

$S=15\times4\times6=360$

8. Utilisation d'un logiciel

8.1. Géogébra

Pour déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier naturel supérieur ou égal à 2, on utilise l'instruction : Facteurspremiers[a]

Exemple :

On entre dans la barre de saisie :

L=Facteurspremiers[43560]

Les résultats sont affichés dans la partie algèbre. On obtient : L={2,2,2,3,3,5,11,11}

Donc $43560=2^3\times3^2\times5\times11^2$

8.2. Xcas

- Dans l'application arithmétique, pour déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier naturel supérieur ou égal à 2, on utilise l'instruction : facteurs_premiers(a)

Exemple :

On entre dans la barre de saisie :

facteurs_premiers(43560)

Le résultat affiché est : [2 3 3 2 5 1 11 2] (il n'y a pas de virgule)

On n'obtient pas la liste des nombres premiers, mais il faut lire :

2 3 : 2^3

3 2 : 3^2

5 1 : 5^1

11 2 : 11^2

on obtient la décomposition en produit de facteurs premiers suivante :

$43560=2^3\times3^2\times5\times11^2$

- On peut obtenir directement cette décomposition en utilisant l'instruction : factoriser_entier(a)

Exemple :

On entre dans la barre de saisie :

factoriser_entier(43560)

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Le résultat affiché est : $2^3.3^2.5^1.11^2$

- On peut obtenir directement la liste des diviseurs d'un entier naturel supérieur ou égal à 2 en utilisant l'instruction : divisors(a)

(on considère les diviseurs entiers naturels)

Exemple :

On entre dans la barre de saisie :

divisors(43560)

Le résultat est la liste « importante » des diviseurs de 43560.

- On peut obtenir directement le nombre des diviseurs d'un entier naturel supérieur ou égal à 2 en utilisant l'instruction : size(divisors(a))

Exemple :

On entre dans la barre de saisie :

size(divisors(43560))

Le résultat affiché est 72

Remarque :

$43560=2^3\times3^2\times5^1\times11^2$

Le nombre de diviseurs est :

$(3+1)(2+1)(1+1)(2+1)=4\times3\times2\times3=72$

- On peut obtenir directement la somme des diviseurs d'un entier naturel supérieur ou égal à 2 en utilisant l'instruction : sum(divisors(a))

Exemple :

On entre dans la barre de saisie :

sum(divisors(43560))

Le résultat affiché est 155610

- On peut déterminer si un nombre donné est premier ou non premier en utilisant l'instruction : est_premier(a)

Exemple :

On entre dans la barre de saisie :

est_premier(2013)

Le résultat affiché est : faux

Remarque :

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

2013 est divisible par 3 et par 11

Si le nombre donné est premier, le résultat affiché est vrai.

Il existe encore d'autres instructions relatives aux nombres premiers.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés