## Exercice

$n$ est un entier naturel.

$a = n^3 - n$ et $b = 2n^3 + 3n^2 + n$

1. Démontrer que $a$ et $b$ sont divisibles par 6.
2. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $n^3 + 5n$ est un multiple de 6. Puis retrouver les résultats de la première question.

**Correction :**

1.
$a=n^3-n$
$a=n(n^2-1)$
$a=n(n-1)(n+1)$

Si $n=0$ alors $a=0$ et $a$ est divisible par 6
On suppose maintenant que $n\in\mathbb{N}^*$
$n-1$ ; $n$ ; $n+1$ sont trois entiers naturels consécutifs donc au moins l'un d'eux est un multiple de 2 et l'un des trois nombres est un multiple de 3.
Donc $a$ est un multiple de 6, c'est à dire $a$ est divisible par 6.

$b=2n^3+3n^2+n$
$b=n(2n^2+3n+1)$

On factorise $2n^2+3n+1$
$2n^2+3n+1=0$
$\Delta=b^2-4ac$
$\Delta=9-8$
$\Delta=1$
$n_1=\frac{-3-1}{4}=-1$ $\qquad$ $n_2=\frac{-3+1}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$
$2n^2+3n+1$
$=2(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$
$=(n+1)(2n+1)$

On a donc:
$b=n(n+1)(2n+1)$
$n$ et $n+1$ sont deux entiers naturels consécutifs donc l'un d'eux est un multiple de 2.
Par conséquent $b$ est **divisible par 2**.

Si $\boxed{n=3p}$ avec $p\in\mathbb{N}$ alors $b$ est **divisible par 3**.
Si $\boxed{n=3p+1}$ avec $p\in\mathbb{N}$ alors $2n+1=2(3p+1)+1=6p+3=3(2p+1)$ alors $b$ est **divisible par 3**.
Si $\boxed{n=3p+2}$ avec $p\in\mathbb{N}$ alors $n+1=3p+2+1=3p+3=3(p+1)$ alors $b$ est **divisible par 3**.

Conclusion: $b$ est **divisible par 6**.

2.
- Pour $n=0$

$0^3+5\times0=0$ et 0 est un multiple de 6.
- On suppose la propriété vraie au rang $n$, c'est à dire $n^3+5n$ est un multiple de 6. On doit démontrer que la propriété est vraie au rang $n+1$, c'est à dire que $(n+1)^3+5(n+1)$ est un multiple de 6

$n^3+5n$ est un multiple de 6 donc:
il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n^3+5n=6k$

$(n+1)^3+5(n+1)$
$=(n+1)(n+1)^2+5(n+1)$
$=(n+1)(n^2+2n+1)+5(n+1)$
$=n^3+2n^2+n+n^2+2n+1+5n+5$

$=n^3+5n+3n^2+3n+6$
$=n^3+5n+3n(n+1)+6$
$=6k+3n(n+1)+6$

Or $n$ et $n+1$ sont deux entiers naturels consécutifs donc l'un d'eux est un multiple de 2 donc $n(n+1)$ est un nombre pair et donc il existe $k'\in\mathbb{N}$ tel que $n(n+1)=2k'$

$(n+1)^3+5(n+1)$
$=6k+6k'+6$
$=6(k+k'+1)$ avec $k+k'+1$ entier naturel

- D'après **le principe de récurrence**, pour tout $n\in\mathbb{N}$ que $n^3+5n$ est **un multiple de 6**.

$a=n^3-n$
$a=n^3+5n-6n$
Or, $n^3+5n$ est un multiple de 6 donc il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n^3+5n=6k$
$a=6k-6n$
$=6(k-n)$
donc $a$ est **un multiple de 6**.

$b=2n^3+3n^2+n$
$b=2(n^3+5n)+3n(n-3)$

$n$ et $n-3$ sont de parités différentes donc l'un des deux est un multiple de 2 donc:
il existe $k'\in\mathbb{N}$ tel que $n(n-3)=2k'$

$n^3+5n$ est un multiple de 6 donc il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n^3+5n=6k$

$b=12k+6k'$
$b=6(2k+k')$
donc $b$ est **un multiple de 6**.