Exercice

Pour chacune des affirmations de 1. à 5., dire si elle est vraie ou si elle est fausse.
1. Si un nombre est divisible par 4 alors il est divisible par 8.
2. Si un nombre est divisible par 2 et 3 alors il est divisible par 6.
3. Si un nombre est divisible par 4 et 6 alors il est divisible par 24.
4. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux alors les entiers $a+b$ et $a-b$ sont premiers entre eux.
5. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux alors les entiers $2a+b$ et $3a+2b$ sont premiers entre eux.

Correction :

1. Si un nombre est divisible par 4 alors il est divisible par 8.

FAUX
20 est divisible par 4 mais 20 n'est pas divisible par 8.

2. Si un nombre est divisible par 2 et 3 alors il est divisible par 6.

VRAI
Soit n divisible par 2 et 3
Donc: $n=2k$ et $n=3k'$ avec $k\in\mathbb{N}$ et $k'\in\mathbb{N}$

$2k=3k'$

3 divise $2k$
$\mathscr{P}$gcd(2;3)=1
D'après **le théorème de Gauss**, 3 divise k
Il existe $q\in\mathbb{N}$ tel que $k=3q$

Par suite,
$n=2\times 3q$
$n=6q$
Donc, n est **divisible par 6**.

3. Si un nombre est divisible par 4 et 6 alors il est divisible par 24.

FAUX
12 est divisible par 4 et 6 mais 12 n'est pas divisible par 24.

4. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux alors les entiers $a+b$ et $a-b$ sont premiers entre eux.

FAUX
$a=7$ et $b=3$
$\mathscr{P}$gcd(a;b)=1

$a+b=10$ et $a-b=4$
$\mathscr{P}$gcd(a+b;a-b)=2

Pour trouver un autre contre exemple, il suffit de considérer 2 nombres premiers entre eux et impairs.

5. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux alors les entiers $2a+b$ et $3a+2b$ sont premiers entre eux.

VRAI
On pose:
$A=2a+b$ (1)
$B=3a+2b$ (2)

D'après (1): $b=A-2a$
On remplace dans (2):

$B=3a+2(A-2a)$
$B=3a+2A-4a$
$a=2A-B$

On remplace dans (1):
$A=2(2A-B)+b$
$A=4A-2B+b$
$b=-3A+2B$

Pour montrer que A et B sont premiers entre eux, nous allons utiliser **le théorème de Bezout**.

a et b sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bezout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que:
$\boxed{au+bv=1}$

donc:
$(2A-B)u+(-3A+2B)v=1$
$A(2u-3v)+B(-u+2v)=1$

On pose $U=2u-3v$ et $V=-u+2v$
$U\in\mathbb{Z}$ et $V\in\mathbb{Z}$

D'après le théorème de Bezout, les nombres A et B sont **premiers entre eux**.