Exercice

x et y sont des entiers naturels non nuls, vérifiant $x < y$.

S est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ tels que $\mathscr{P}\text{gcd}\,(x\,;y) = y - x$

1. a) Calculer $\mathscr{P}$gcd(363;484)

b) Le couple (363;484) appartient-il à S?

2. Soit n un entier naturel non nul. Le couple $(n\,;n+1)$ appartient-il à S? Justifier la réponse.

3. a) Montrer que $(x\,;y)$ appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel non nul k tel que $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$

b) En déduire que pour tout couple $(x\,;y)$ de S, on a $\mathscr{P}\text{pcm}\,(x\,;y) = k(k+1)(y-x)$

4. a) Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b) En déduire l'ensemble des couples $(x\,;y)$ de S tels que $\mathscr{P}\text{pcm}\,(x\,;y) = 228$

Correction :

1. a)

a	b	Quotient	reste
484	363	1	121
363	121	3	0

$\mathscr{P}$gcd(363;484)=**121**

b)

$y-x=484-363=121$

Donc $\boxed{(363\,;484)\in S}$

2.

a	b	Quotient	reste
$n+1$	n	1	1
n	1	n	0

$\mathscr{P}$gcd(n;$n+1$)=**1**

$y-x=n+1-n=1$

Le couple $\boxed{(n\,;n+1)\in S}$

3. a)

✔ On suppose que $(x\,;y)\in S$

$\mathscr{P}$gcd(x;y)=y-x

Il existe des entiers naturels k et k' tels que:

$x=k(y-x)$ et $y=k'(y-x)$

$y-x=(k'-k)(y-x)$

$0=(k'-k-1)(y-x)$

Or $x<y$ donc $y-x\neq 0$ donc $k'-k-1=0$

Par suite, $k'=k+1$

On a donc:

$\boxed{x=k(y-x)}$ et $\boxed{y=(k+1)(y-x)}$

✔ On suppose qu'il existe un entier naturel non nul k tel que $x=k(y-x)$ et $y=(k+1)(y-x)$

$\mathscr{P}$gcd(x;y)
=$\mathscr{P}$gcd(k(y-x); (k+1)(y-x))
=(y-x)$\mathscr{P}$gcd(k; k+1)

Or $\mathscr{P}$gcd(k; k+1)=1
Donc $\mathscr{P}$gcd(x;y)=y-x
et $\boxed{(x;y)\in S}$

b)
$(x;y)\in S$, donc il existe un entier naturel non nul k tel que $x=k(y-x)$ et $y=(k+1)(y-x)$

$x=k(y-x)$
x=$k\mathscr{P}$gcd(x;y)

$y=(k+1)(y-x)$
y=(k+1)$\mathscr{P}$gcd(x;y)

Donc:
$\mathscr{P}$pcm(x;y)=k(k+1)$\mathscr{P}$gcd(x;y)
$\mathscr{P}$pcm(x;y)=k(k+1)(y-x)

4. a)

228	2
114	2
57	3
19	19
1	

$228=2^2\times3\times19$
Le nombre de diviseurs de 228 est $3\times2\times2=12$
D_{228}={1;2;3;4;6;12;19;38;57;76;114;228}

b)
$x=k(y-x)$ et $y=(k+1)(y-x)$
$\mathscr{P}$pcm(x;y)=k(k+1)(y-x)=228

$k=1$	$k+1=2$	$y-x=114$	$x=114$	$y=228$
$k=2$	$k+1=3$	$y-x=38$	$x=76$	$y=114$
$k=3$	$k+1=4$	$y-x=19$	$x=57$	$y=76$

Les solutions sont **{(114;228); (76; 114); (57; 76)}**