Exercice

1. Montrer pour tout entier naturel n , non nul, n^3-n est divisible par 3.

2. Soit p un nombre premier différent de 2, démontrer que $N=\sum_{k=0}^{k=p-2} 2^k$ est divisible par p .

Correction :

1. Le corollaire du théorème de Fermat affirme:
Pour tout entier naturel a et tout nombre premier p , on a: $a^p \equiv a(p)$
Donc $a^p - a \equiv 0(p)$, c'est à dire $a^p - a$ est divisible par p .

$n \in \mathbb{N}^*$ et 3 est un nombre premier, donc $n^3 - n$ est **divisible par 3**.

Remarques: on peut aussi justifier par une factorisation ou un raisonnement par récurrence.

2.
$N = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{p-2}$ est la somme des $(p-1)$ premiers termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $2^0 = 1$

Donc: $N = \dfrac{1-2^{p-1}}{1-2} = 2^{p-1} - 1$

p est un nombre premier différent de 2 donc p est premier avec 2.
On utilise **le théorème de Fermat**: 2^{p-1} est divisible par p
Par suite: N est **divisible** par p .

