Exercice

Le corollaire du théorème de Fermat affirme:
Pour tout entier naturel a et tout nombre premier p , on a: $a^p \equiv a\,(p)$
La réciproque est-elle vraie?
C'est à dire si pour tout entier naturel a , on a $a^p \equiv a\,(p)$ (avec p entier naturel supérieur ou égal à 2) alors a-t-on p premier?
On se propose de donner un contre-exemple.
1. Décomposer 561 en produit de facteurs premiers.
2. Démontrer que si x est un entier alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x^n - 1)$ est un multiple de $(x-1)$
3. Démontrer que $a^{561} - a$ est divisible par 3 puis par 11, puis par 17.
4. En déduire que pour tout entier naturel a , $a^{561} - a \equiv 0\,(561)$

Correction :

1.

561	3
187	11
17	17
1	

$\boxed{561=3\times 11\times 17}$

2.
$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)$
Si x est un entier alors $x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1$ est un entier et $x-1$ est un entier.
Conséquence: (x^n-1) est **un multiple** de $(x-1)$

Remarque: on peut aussi effectuer un raisonnement par récurrence pour justifier le résultat)

3.
$a^{561}-a=a(a^{560}-1)$
On considère la décomposition de 560 en produit de facteurs premiers
$560=2^4\times 5\times 7$
560 a donc $5\times 2\times 2=20$ diviseurs de 560
D_{560}={1;2;4;5;7;8;10;14;16;20;28;35;40;56;70;80;140;280;560}

$560=2\times 280$
$a^{560}=(a^2)^{280}$
On pose $x=a^2$ et $n=280$
a^{560} -1 est un multiple de a^2-1. Donc il existe $K\in\mathbb{N}$ tel que: $a^{560}-1=(a^2-1)K$

Par suite,
$a^{561}-a=a(a^{560}-1)$
$a^{561}-a=a(a^2-1)K$
$a^{561}-a=(a^3-a)K$
Or a^3-a est divisible par 3(cf exercice 1)
Donc, $a^{561}-a$ est **divisible par 3**

$560=10\times 56$
$a^{560}=(a^{10})^{56}$
On pose $x=a^{10}$ et $n=56$
$a^{560}-1$ est un multiple de $a^{10}-1$. Donc il existe $K'\in\mathbb{N}$ tel que: $a^{560}-1=(a^{10}-1)K'$

Par suite,
$a^{561}-a=a(a^{560}-1)$
$a^{561}-a=a(a^{10}-1)K'$
$a^{561}-a=(a^{11}-a)K'$
Or $a^{11}-a$ est divisible par 11(cf exercice 1)
Donc, $a^{561}-a$ est **divisible par 11**

$560=16\times 35$
$a^{560}=(a^{16})^{35}$

On pose $x=a^{16}$ et $n=35$
$a^{560}-1$ est un multiple de $a^{16}-1$. Donc il existe $K''\in\mathbb{N}$ tel que: $a^{560}-1=(a^{16}-1)K''$

Par suite,
$a^{561}-a=a(a^{560}-1)$
$a^{561}-a=a(a^{16}-1)K''$
$a^{561}-a=(a^{17}-a)K''$
Or $a^{17}-a$ est divisible par 17(cf exercice 1)
Donc, $a^{561}-a$ est **divisible par 17**

4.
3; 11 et 17 sont trois nombres premiers donc premiers entre eux 2 à 2.
$a^{561}-a$ est divisible par 3; 11 et 17.
Donc $a^{561}-a$ est divisible par $3\times11\times17=561$
Par suite:
$a^{561}-a\equiv0\,(561)$
$a^{561}\equiv a\,(561)$
et pourtant 561 n'est pas un nombre premier.
Donc **la réciproque du corollaire du théorème de Fermat n'est pas vraie**.

