Exercice

Démontrer que pour tout entier naturel non nul n , on a $N=n^{13}-n$ est divisible par 13; 7; 5; 3 et 2.

Correction :

13 est un **nombre premier**, donc d'après **le corollaire du théorème de Fermat**: $n^{13}-n$ est divisible par 13.

$n^{13}-n=n(n^{12}-1)$

$12=2^2\times 3$
Le nombre 12 a 6 diviseurs
D₁₂={1;2;3;4;6;12}

$12=2\times 6$
$n^{12}=(n^6)^2$
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n(n^6-1)(n^6+1)=(n^7-1)(n^6+1)$

7 est un **nombre premier**, donc d'après **le corollaire du théorème de Fermat**: n^7-n est divisible par 7.
Par suite, $n^{13}-n$ est **divisible par 7**.

$12=3\times 4$
$n^{12}=(n^4)^3$
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n[(n^4)^3-1]$

On utilise le résultat de l'exercice précédent:
$(n^4)^3-1$ est un multiple de n^4-1 . Donc il existe $K\in\mathbb{N}$ tel que: $(n^4)^3-1=(n^4-1)K$

$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n[(n^4)^3-1]=n(n^4-1)K=(n^5-1)K$

5 est un **nombre premier**, donc d'après **le corollaire du théorème de Fermat**: n^5-n est divisible par 5.
Par suite, $n^{13}-n$ est **divisible par 5**.

$12=2\times 6$
$n^{12}=(n^2)^6$
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n[(n^2)^6-1]$

On utilise le résultat de l'exercice précédent:
$(n^2)^6-1$ est un multiple de n^2-1 . Donc il existe $K'\in\mathbb{N}$ tel que: $(n^2)^6-1=(n^2-1)K'$

$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n(n^{¿}2-1)K'=(n^3-n)K'$

3 est **un nombre premier**, donc d'après **le corollaire du théorème de Fermat**: n^3-n est divisible par 3.
Par suite, $n^{13}-n$ est **divisible par 3**.

$n^{13}-n=n(n^{12}-1)$

On utilise le résultat de l'exercice précédent:
$n^{12}-1$ est un multiple de $n-1$. Donc il existe $K''\in\mathbb{N}$ tel que:= $n^{12}-1=(n-1)K''$

$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n(n-1)K''=(n^2-n)K''$

2 est **un nombre premier**, donc d'après **le corollaire du théorème de Fermat**: n^2-n est divisible par 2.
Par suite, $n^{13}-n$ est **divisible par 2**.