Exercice

On suppose qu'il existe des entiers naturels non nuls m , n et a tels que:
$(4m+3)(4n+3)=4a^2+1$
1. Soit p un nombre premier quelconque divisant $4m+3$.
Montrer que p est impair et que: $(2a)^p-1\equiv(-1)^{\frac{(p-1)}{2}}(p)$
2. En utilisant le théorème de Fermat, montrer que $p\equiv 1(4)$
3. En utilisant la décomposition de $4m+3$ en facteurs premiers obtenir une contradiction.

Correction :

1.
$4m \equiv 0(2)$
$4m+3 \equiv 3(2)$
$4m+3 \equiv 1(2)$

$4m+3$ n'est pas divisible par 2 donc $p \neq 2$ et donc p est impair.
p est impair donc $p=2q+1$ avec $q \in \mathbb{N}$

p est un diviseur de $4m+3$
$4m+3$ est un diviseur de $4a^2+1$
Donc p est un diviseur de $4a^2+1$
Par suite,
$4a^2+1 \equiv 0(p)$
$4a^2 \equiv -1(p)$
$(2a)^2 \equiv -1(p)$
$(2a)^{2q} \equiv (-1)^q(p)$

Or, $2q=p-1$
$q=\frac{p-1}{2}$
On a donc:
$\boxed{(2a)^p-1 \equiv (-1)^{\frac{(p-1)}{2}}(p)}$

2.
Pour pouvoir utiliser le théorème de Fermat, on doit vérifier que p et $2a$ sont premiers entre eux.
p étant un nombre premier il suffit de vérifier que p n'est pas un diviseur de $2a$.

On suppose que $2a \equiv 0(p)$
On a alors $4a^2 \equiv 0(p)$
et donc $4a^2+1 \equiv 1(p)$
Or, on a vu dans la question précédente que: $4a^2+1 \equiv 0(p)$

Donc p n'est pas un diviseur de $2a$ et p et $2a$ sont **premiers entre eux**.

D'après **le théorème de Fermat**:
$(2a)^{p-1}-1 \equiv 0(p)$
$\boxed{(2a)^{p-1} \equiv 1(p)}$

Or d'après la première question, $(2a)^p-1 \equiv (-1)^{\frac{(p-1)}{2}}(p)$
On a donc: $(-1)^{\frac{(p-1)}{2}} \equiv 1(p)$
Cela signifie que $\frac{p-1}{2}$ est **un nombre pair**.
Or $q=\frac{p-1}{2}$
Donc q est **un nombre pair**.

Il existe $q' \in \mathbb{N}$ tel que $q=2q'$
$p=2q+1$

$p=4q'+1$
et donc $\boxed{p\equiv 1(4)}$

3.
$4m+3=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\times p_m^{\alpha_m}$
$p_1;p_2;\ldots;p_m$ sont des nombres premiers distincts.
et $\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_m$ sont des entiers naturels non nuls.

$p_1;p_2;\ldots;p_m$ sont des nombres premiers qui divisent $4m+3$
D'après la question précédente:
$p_1\equiv 1(4)$ $\quad p_2\equiv 1(4)$ $\quad\ldots.$ $\quad p_m\equiv 1(4)$
Donc:
$p_1^{\alpha_1}\equiv 1(4)$ $\quad p_2^{\alpha_2}\equiv 1(4)$ $\quad\ldots.$ $\quad p_m^{\alpha_m}\equiv 1(4)$
Par suite:
$p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\times p_m^{\alpha_m}\equiv 1(4)$
$4m+3\equiv 1(4)$
Or,
$4m\equiv 0(4)$
$4m+3\equiv 3(4)$
Il y a **contradiction**, **il n'existe pas** des entiers naturels non nuls m , n et a tels que: $\boxed{(4m+3)(4n+3)=4a^2+1}$