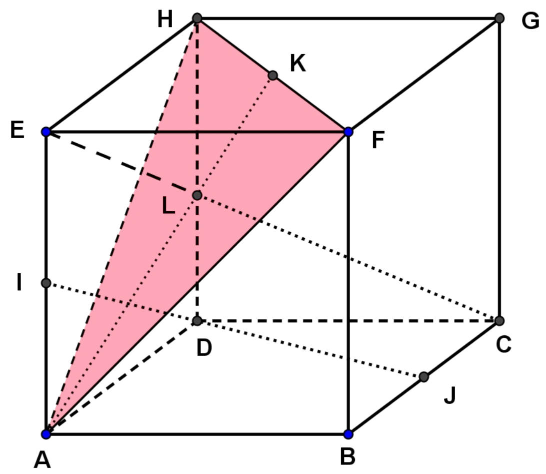
Exercice 1 — 5 points

Description de la figure dans l'espace muni du repère orthonormé $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE})$.
ABCDEFGH désigne un cube de côté 1. On appelle $\mathscr{P}$ le plan (AFH).



Le point I est le milieu du segment [AE].
Le point J est le milieu du segment [BC].
Le point K est le milieu du segment [HF].
Le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan $\mathscr{P}$.

Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

1 . **a.** Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.
b. Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.
c. Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes.
d. Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.

2 . **a.** Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 0.
b. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à (-1).
c. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 1.
d. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 2.

3 . Dans le repère orthonormé $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE})$
a. Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x+y+z-1=0$.
b. Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x-y+z=0$.
c. Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $-x+y+z=0$.
d. Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x+y-z=0$.

4 . **a.** $\overrightarrow{EG}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
b. $\overrightarrow{EF}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
c. $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
d. $\overrightarrow{DI}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

5 . **a.** $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$.

b. $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$.

c. $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$.

d. $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.

CORRECTION

1. Réponse : $\boxed{\text{b}}$ **Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires**

Justifications (non demandées)

Les quatre points A,E,G et C sont coplanaires car les arêtes du cube[AE] et [GC] sont strictement parallèles.

Le point B n'appartient pas au plan (CAE) car ABCDEFGH est un cube et la droite (BC) est sécante au plan (CAE) en C donc la droite (BC) n'est pas contenue dans le plan (CAE).

J appartient à la droite ((BC) donc J n'appartient pas au plan (CAE) or I appartient au plan (CAE), conséquence : la (IJ) est sécante au plan (CAE) en I.

La droite (CE) est contenue dans le plan (CAE) et I n'appartient pas à la droite (CE).

Conclusion :

Les droites (IJ) et (CE) ne sont pas coplanaires.

2. Réponse : $\boxed{\text{c}}$ **Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 1**

Justifications (non demandées)

(A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$) est un repère orthonormé donc AB=AC= ...=1

$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})\cdot(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FG})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BG}$

Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF}=0$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ et $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BG}=0$

d'autre part $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BF}=BF^2=1$

Conclusion :

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}=1$$

En utilisant les coordonnées

$A(0;0;0)$ $F(1;0;0)$ $B(1;0;0)$ $G(1;1;1)$

$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}=1\times0+0\times1+1\times1=1$

3 . Réponse : $\boxed{\text{d}}$ **Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : x+y-z = 0**

Justifications (non demandées)

$\mathscr{P}$ est le plan (AFH).

$A(0;0;0)$ $F(1;0;1)$ $H(0;1;1)$

. $0+0+0-1=-1\neq0$

A n'appartient pas au plan d'équation cartésienne $x+y+z-1=0$

. $1-0+1=2\neq0$

F n'appartient pas au plan d'équation cartésienne $x-y+z=0$

. $-0+1+1=2\neq0$

H n'appartient pas au plan d'équation cartésienne $-x+y+z=0$

. $0+0-0=0$ et $1+0-1=0$ et $0+1-1=0$

donc le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x+y-z=0$

4. Réponse : $\boxed{\text{b}}$ **Le vecteur $\overrightarrow{EL}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$**

Justifications (non demandées)

$\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne : $x+y-z=0$

$\vec{N}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

$E(0;0;1)$ $C(1;1;0)$ $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{EC}=\vec{N}$

L appartient à la droite (EC) donc $\overrightarrow{EL}$ est un vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{EC}$

et $\overrightarrow{EL}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

5. Réponse : $\boxed{\textbf{d}}$ $\widehat{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

Justifications (non demandées)

On détermine les coordonnées de L.

L est le point d'intersection de $\mathscr{P}$ et (EC)

$E(0;0;1)$ $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ donc (EC) $\begin{cases}x=t+0\\y=t+0\\z=-t+1\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

$\mathscr{P}$: $x+y-z=0$

On obtient $t+t-(-t+1)=0$ 3t = 1 t= $\frac{1}{3}$

$\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{1}{3}\\z=\frac{2}{3}\end{cases}$ $L\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

donc $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$