Exercice 2 5 points

Partie A

Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1 et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $F_n=\frac{X_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n.

On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAF .
Pour cela on interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi trois réponses possibles, notées A,B et C, la bonne réponse étant la A.
On note r la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard (de façon équiprobable).

1. On interroge un étudiant au hasard. On note :
A l'événement « l'étudiant répond A »
B l'événement « l'étudiant répond B »
C l'événement « l'étudiant répond C »
R l'événement « l'étudiant connaît la bonne réponse »
$\bar{R}$ l'événement contraire de R

a. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
b. Montrer que la probabilité de l'événement A est P(A) = $\frac{1}{3}$ (1+2r).
c. Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisi A connaisse la bonne réponse.

2. Pour estimer r, on interroge 400 personnes et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses.On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiants revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.

a. Donner la loi de X et ses paramètres n et p en fonction de r.
b. Dans un premier sondage, on constate que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés.
Donner un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de p.
En déduire un intervalle de confiance au seuil de 95 % de r.
c. Dans la suite, on suppose que r = 0,4. Compte-tenu du grand nombre d'étudiants, on considérera que X suit une loi normale.
- Donner les paramètres de cette loi normale.
- Donner une valeur approchée de $P(X \leqslant 250)$ à 10^{-3} près.
On s'aider de la table en annexe 1, qui donne une valeur approchée de $p(X \leqslant t)$ où X est la variable aléatoire de la question 2.c.

ANNEXE 1
EXERCICE 2

F12	=LOI.NORMALE($A12+E$1;240;RACINE(96);VRAI)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	235	0.305	0.309	0.312	0.316	0.319	0.323	0.327	0.330	0.334	0.338
3	236	0.342	0.345	0.349	0.353	0.357	0.360	0.364	0.368	0.372	0.376
4	237	0.380	0.384	0.388	0.391	0.395	0.399	0.403	0.407	0.411	0.415
5	238	0.419	0.423	0.427	0.431	0.435	0.439	0.443	0.447	0.451	0.455
6	239	0.459	0.463	0.467	0.472	0.476	0.480	0.484	0488	0.492	0.496
7	240	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.533	0.537
8	241	0.541	0.545	0.549	0553	0.557	0.561	0.565	0.569	0.573	0.577
9	242	0.581	0.585	0.589	0.593	0.597	0.601	0.605	0.609	0.612	0.616
10	243	0.620	0.624	0.628	0.632	0.636	0.640	0.643	0.647	0651	0.655
11	244	0.658	0.662	0.666	0.670	0.673	0.677	0.681	0.684	0.688	0.691
12	245	0.695	0.699	0.702	0.706	0.709	0.713	0.716	0.720	0.723	0.726
13	246	0.730	0733	0.737	0.740	0.743	0.746	0.750	0.753	0.756	0.759
14	247	0.763	0.766	0.769	0.772	0.775	0.778	0.781	0.784	0.787	0.790
15	248	0.793	0.796	0.799	0.802	0.804	0.807	0.810	0.813	0.815	0.818
16	249	0.821	0.823	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839	0.841	0.844
17	250	0.846	0.849	0.851	0.853	0.856	0.858	0.860	0.863	0.865	0.867
18	251	0.869	0.871	0.874	0.876	0.878	0.880	0.882	0.884	0.886	0.888
19	252	0.890	0.892	0.893	0.895	0.897	0.899	0.901	0.903	0.904	0.906
20	253	0.908	0.909	0.911	0.913	0.914	0.916	0.917	0.919	0.921	0.922
21	254	0.923	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932	0.933	0.935	0.936
22	255	0.937	0.938	0.940	0.941	0.942	0.943	0.944	0.945	0.947	0.948
23	256	0.949	0.950	0.951	0.952	0.953	0.954	0.955	0.956	0.957	0.958
24	257	0.959	0.960	0.960	0.961	0.962	0.963	0.964	0.965	0.965	0.966
25	258	0.967	0.968	0.968	0.969	0.970	0.970	0.971	0.972	0.972	0.973
26	259	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977	0.977	0.978	0.978	0.979
27	260	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982	0.982	0.983	0.983	0.984

Extrait d'une feuille de calcul

Exemple d 'utilisation : au croisement de la ligne 12 et de la colonne E le nombre 0,706 correspond à $P(X \leqslant 245{,}3)$.

CORRECTION

PARTIE A

$p-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f \leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \left(p-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f \text{ et } f \leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$

$\Leftrightarrow \left(p \leqslant f+\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ et } -p \leqslant -f+\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \Leftrightarrow \left(p \leqslant f+\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ et } p \geqslant f-\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$

$\Leftrightarrow f-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant f+\frac{1}{\sqrt{n}}$

conclusion

Si l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}} ; p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient f avec une probabilité au moins égale à 0,95 alors l'intervalle $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}} ; f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

PARTIE B

1. L'énoncé nous donne :

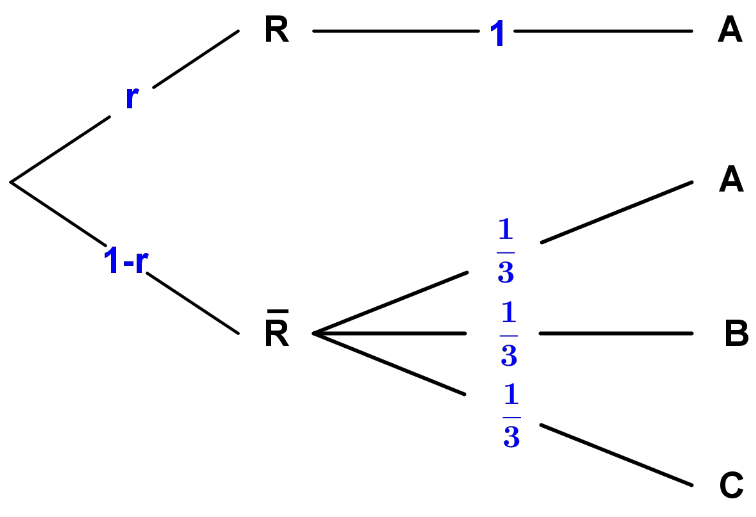
$P(R)=r$ $(0<r<1)$ et si l'étudiant connaît la bonne réponse, il répond A donc $P_R(A)=1$.

On obtient : $P(\bar{R})=1-r$.

$P_{\bar{R}}(A)=P_{\bar{R}}(B)=P_{\bar{R}}(C)$ or $P_{\bar{R}}(A)+P_{\bar{R}}(B)+P_{\bar{R}}(C)=1$

donc $P_{\bar{R}}(A)=P_{\bar{R}}(B)=P_{\bar{R}}(C)=\frac{1}{3}$

a. On obtient l'arbre pondéré :



b. En utilisant la formule des probabilités torales ou l'arbre pondéré, on obtient :

$P(A)=P(A\cap R)+P(A\cap \bar{R})=P(R)\times P_R(A)+P(\bar{R})\times P_{\bar{R}}(A)$

$P(A)=r\times 1+(1-r)\times\frac{1}{3}=r+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}r=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}r$

$P(A)=\frac{1}{3}(1+2r)$

c. On nous demande de calculer : $P_A(R)$

or $P_A(R)=\dfrac{P(A\cap R)}{P(R)}=\dfrac{r}{\frac{1}{3}(1+2r)}=\dfrac{3r}{1+2r}$

2. a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
On interroge au hasard un étudiant
Succès : L'étudiant répond A
Echec : L'étudiant répond B ou C

La probabilité de succès est : $p=\frac{1}{3}(1+2r)$.

On interroge 400 étudiants (en supposant que l'on effectue des tirages indépendants avec remise).

On obtient un schéma de Bernoulli de paramètres $n=400$ et $p=\frac{1}{3}(1+2r)$ et la variable aléatoire X égale au nombre de succès en 400 épreuves admet pour loi de probabilité : la loi binomiale de paramètres 400 et $\frac{1}{3}(1+2r)$.

b. La fréquence de succès obtenu dans cet échantillon est : $f=\dfrac{240}{400}=0{,}6$

En utilisant le résultat de la partie A, on obtient pour intervalle de confiance au seuil de 95 %: $\left[0{,}6-\dfrac{1}{\sqrt{400}};0{,}6+\dfrac{1}{\sqrt{400}}\right]=[0{,}55;0{,}65]$.

Donc $0{,}55\leqslant p\leqslant 0{,}65$ soit $0{,}55\leqslant \frac{1}{3}(1+2r)\leqslant 0{,}65$ et $1{,}65\leqslant 1+2r\leqslant 1{,}95$

$0{,}65\leqslant 2r\leqslant 0{,}95$ on obtient $0{,}325\leqslant r\leqslant 0{,}475$

$[0{,}325;0{,}475]$ **est un intervalle de confiance au seuil de 95 % de r.**

c. $r=0{,}4$ alors $p=\frac{1}{3}(1+2r)=\frac{1}{3}\times 1{,}8=0{,}6$

La loi binomiale de paramètres $n=400$ et $p=0{,}6$ a pour espérance mathématique $np=400\times 0{,}6=240$ et pour variance $V=np(1-p)=400\times 0{,}6\times 0{,}4=96$.

La loi normale approchant cette loi à pour paramètres $\mu=240$ et $\sigma=\sqrt{96}$.

En utilisant la table ou la calculatrice on obtient : $\mathbf{P(X\leqslant 250)=0{,}846}$.