Exercice 3 5 points

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie est dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x)=(x+1)e^{x}$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que pour tout réel x, $f'(x)=(x+2)e^{x}$

3. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x)=x+1-m\mathrm{e}^{-x}$$

et on note C_m la courbe de la fonction g_n dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. a. Démontrer que $g_m(x)=0$ si et seulement si $f(x)=m$.

b. Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe C_m avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.

2. On a représenté en annexe 2 les courbes C_0, C_e et C_{-e} (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et -e).
Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.

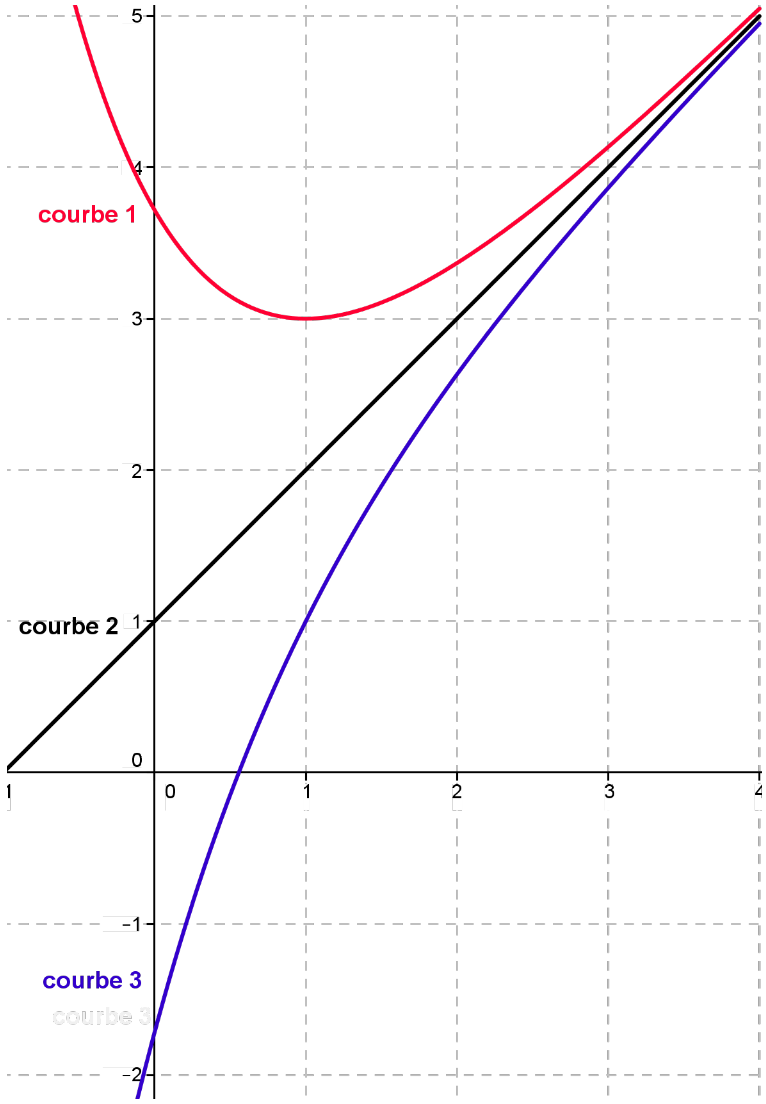
3. Etudier la position de la courbe C_m par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x+1$ suivant les valeurs du réel m.

4. a. On appelle D_2 la partie de plan comprise entre C_e, C_{-e}, l'axe (Oy) et la droite $x=2$.
Colorier D_2 sur l'annexe 2.

b. Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie de plan comprise entre C_e, C_{-e}, l'axe (Oy) et la droite d'équation $x=a$ .On désigne par $\mathscr{A}$ (a) l'aire de cette partie du plan exprimée en unités d'aire.
Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathscr{A}$ (a) = $2\mathrm{e}-2\mathrm{e}^{1-a}$
En déduire la limite de $\mathscr{A}$ (a) quand a tend vers $+\infty$.

ANNEXE 2

Exercice 3 à rendre avec la copie



CORRECTION

Partie A

Pour tout nombre réel x : $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x}$

1 . $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

. $f(x)=x\,\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x\,\mathrm{e}^{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$

On dérive un produit et $(\mathrm{e}^{x})'=\mathrm{e}^{x}$

$f'(x)=1\times\mathrm{e}^{x}+(1+x)\mathrm{e}^{x}=(2+x)\mathrm{e}^{x}$

3. Pour tout nombre réel x : $\mathrm{e}^{x}>0$, donc le signe de $f'(x)$ est le signe de : $x+2$

Tableau de variations de f

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-2)=-\mathrm{e}^{-2}=\dfrac{-1}{\mathrm{e}^{2}}$

Partie B

$g_m(x)=x+1-m e^{-x}$ m $\in\mathbb{R}$

1. a. $g_m(x)=0 \Leftrightarrow x+1-m\mathrm{e}^{-x}=0 \Leftrightarrow x+1=m\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{m}{\mathrm{e}^{x}} \Leftrightarrow (x+1)\mathrm{e}^{x}=m \Leftrightarrow f(x)=m$

b. Le nombre de points d'intersection de l'axe des abscisses et de la courbe C_m est le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

En considérant le tableau de variations de f

. $\mathrm{m}<-\mathrm{e}^{-2}$ zéro point d'intersection

. $\mathrm{m}=-\mathrm{e}^{-2}$ un point d'intersection

. $-\mathrm{e}^{-2}<\mathrm{m}<0$ deux points d'intersection

. $0\leqslant\mathrm{m}$ un point d'intersection

2 . $-\mathrm{e}<-\mathrm{e}^{-2}$

$\mathrm{C}_{-\mathrm{e}}$ a aucun point d'intersection avec l'axe des abscisses donc

$\mathrm{C}_{-\mathrm{e}}$ **est la courbe 1 (en rouge)**

. $\mathrm{e}\geqslant 0$

C_{e} a un seul point d'intersection avec l'axe des abscisses donc

C_2 **est la courbe 3 (en bleu)**

. Remarque

Pour m = 0 $g_0(x)=x+1$ donc C_0 est la courbe 2 c'est à dire la droite d'équation : $y=x+1$.

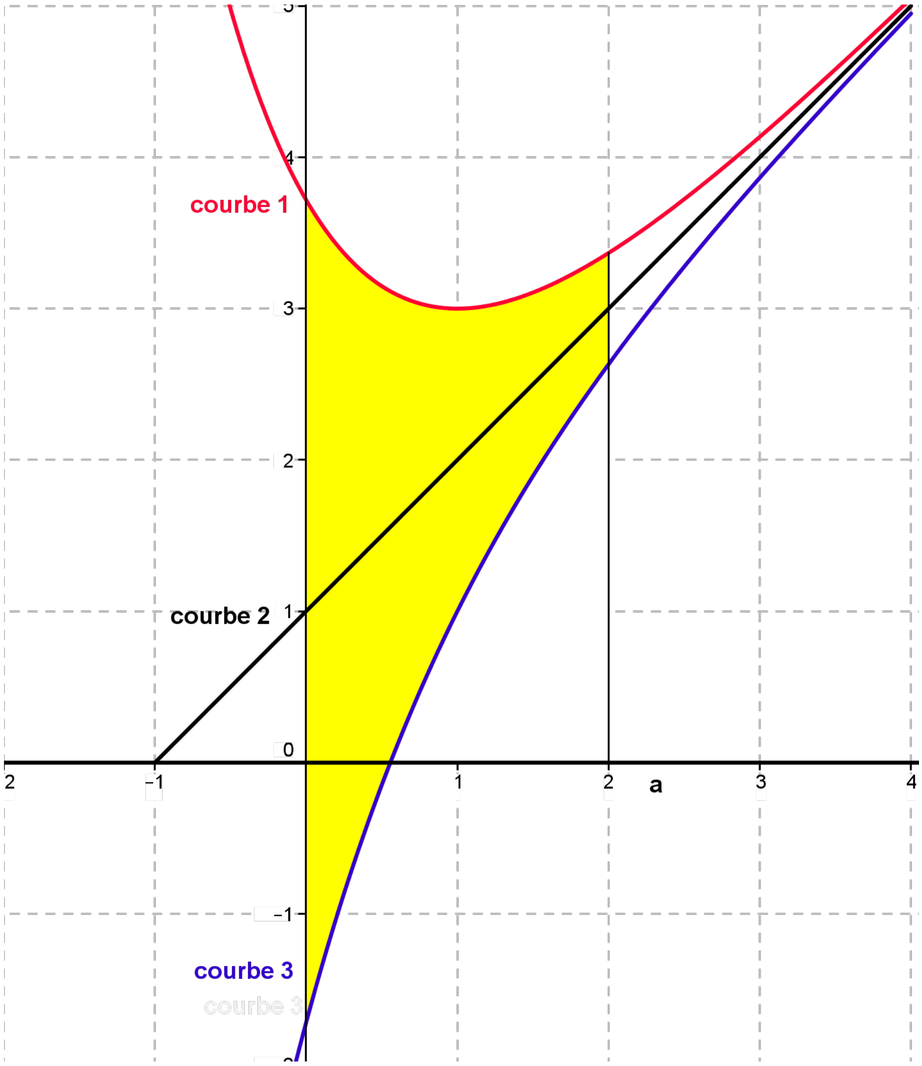
3. $g_m(x)-(1+x)=(1+x)-m\,e^{-x}-(1+x)=-m\,e^{-x}$

. si m < 0 alors $g_m(x)-(1+x)>0$ donc C_m est au dessus de $\mathscr{D}$.

. si m = 0 alors $g_0(x)-(1+x)=0$ donc $C_0 = \mathscr{D}$.

. si m > 0 alors $g_m(x)-(1+x)<0$ donc C_m est en dessous de $\mathscr{D}$.

4. a.



b. C_{-e} est au dessus de $\mathscr{D}$ sur $\mathbb{R}$, C_e est en dessous de $\mathscr{D}$ sur $\mathbb{R}$ donc C_{-e} est au dessus de C_e sur $\mathbb{R}$

g_{-e} et g_e sont continues sur $\mathbb{R}$.

a > 0 donc l'aire $\mathscr{A}$ (a), en unités d'aire, de D_2 est égale à : $\int_0^a (g_{-e}-g_e)(x)\,dx$.

$g_{-e}(x)-g_e(x)=x+1+e\times e^{-x}-(x+1-e\times e^{-x})=2\,e^{1-x}$

$\mathscr{A}$ (a) = $\int_0^a 2\,e^{1-x}\,dx$

$h(x)=2\,e^{1-x}=2\,e^{u(x)}$ avec u'(x) = -1

$H(x)=2\left(\frac{e^{1-x}}{-1}\right)=-2e^{1-x}$ H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$

$\mathscr{A}$ (a) = H(a) – H(0) = $-2e^{1-a}$ + 2e

$\mathscr{A}$ (a) = 2e – $2e^{1-a}$ U.A.

$\lim\limits_{a\to+\infty}(1-a)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ donc $\lim\limits_{a\to+\infty} e^{1-a}=0$

La limite de $\mathscr{A}$ (a) en $+\infty$ est égale à 2e