Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1 + i$ et, pour tout entier naturel n, par : $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{3}$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + ib_n$ où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n .

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0

2. Calculer z_1 , puis en déduire que $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables : A et B des nombres réels
K et N des nombres entiers
Initialisation : Affecter à A la valeur 1
Affecter à B la valeur 1
Traitement :
Entrer la valeur de N
Pour K variant de 1 à N
Affecter à A la valeur $\dfrac{\text{A} + \sqrt{\text{A}^2 + \text{B}^2}}{3}$
Affecter à B la valeur $\dfrac{\text{B}}{3}$
Fin Pour
Afficher A

a. On exécute cet algorithme en saisissant N = 2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

k	***A***	***B***
1		
2		

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n et l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n et déterminer la limite de (b_n).

3. a. On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' :

$$|z+z'|\leqslant|z|+|z'| \quad \text{(inégalité triangulaire)}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}|\leqslant\dfrac{2|z_n|}{3}$

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=|z_n|$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n\sqrt{2}$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

c. Montrer que pour tout entier naturel n, $|a_n|\leqslant u_n$. En déduire la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

CORRECTION

Partie A

1. $z_0 = 1+\mathrm{i}$ $a_0 = 1$ **et** $b_0 = 1$

2. $|z_0| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$z_1 = \frac{z_0+|z_0|}{3} = \frac{1+\mathrm{i}+\sqrt{2}}{3} = \frac{1+\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{i}$$

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{3} \quad \text{et} \quad b_1 = \frac{1}{3}$$

3. a.

k	A	B
1	0.8047	0.3333
2	0.5586	0.1111

b. a_N

Partie B

1. $z_n = a_n + \mathrm{i}\, b_n$

$$z_{n+1} = \frac{1}{3}(z_n+|z_n|) = \frac{1}{3}(a_n+1\,b_n) + \frac{1}{3}\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2} = \frac{1}{3}\left(a_n+\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2}\right) + \mathrm{i}\,\frac{b_n}{3}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2} \quad \textbf{et} \quad b_{n+1} = \frac{b_n}{3}$$

2. (b_n) est la suite géométrique de premier terme $b_0 = 1$ et de raison q = $\frac{1}{3}$,

donc pour tout entier naturel n, $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$

3. a. $z_{n+1} = \frac{z_n+|z_n|}{3} = \frac{1}{3}(z_n+|z_n|)$

$$|z_{n+1}| = \left|\frac{1}{3}(z_n+|z_n|)\right| = \frac{1}{3}|z_n+|z_n|| \leqslant \frac{1}{3}(|z_n|+||z_n||) = \frac{2}{3}|z_n$$

donc $|z_{n+1}| \leqslant \frac{2}{3}|z_n|$;

b. $u_n = |z_n|$

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.

Initialisation

$u_0 = |z_0| = \sqrt{2}$ et $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ conséquence : $u_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \sqrt{2}$

La propriété est donc vérifiée pour n = 0 .

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$ et on doit démontrer que $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2}$.

Or $u_{n+1} = |z_{n+1}| \leqslant \frac{2}{3}|z_n| \leqslant \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2}$

donc $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2}$

Conclusion

Le principe récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.

Remarque

$u_n = |z_n| \geqslant 0$ donc $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.

$-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Le théorème des gendarmes nous permet de conclure que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

c. a_n est la partie réelle de z_n , on a : $|a_n| \leqslant |z_n| = u_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.