Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On définit les suites (u_n) et (v_n) sur l »ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$par :

$$u_0 = 0 \; ; \; v_0 = 1 \text{ et } \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

Le but de l'exercice est d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

1. Calculer u_1 et v_1 .

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables : u,v et w nombres réels
N et k des nombres entiers
Initialisation : u prend la valeur 0
v prend la valeur 1
Début de l'algorithme
Entrer la valeur de N
Pour k variant de 1 à N
w prend la valeur u
u prend la valeur $\dfrac{w+v}{2}$
v prend la valeur $\dfrac{w+2v}{3}$
Fin Pour
Afficher u
Afficher v
Fin de l'algorithme

a. On exécute cet algorithme en saisissant N = 2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

k	w	u	v
1			
2			

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspondent les valeurs affichées par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

3. Pour tout entier naturel n on définit le vecteur colonne X_n par $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

et la matrice A par $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que,pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$

b. Démontrer par récurrence que $X_n = A^n X_0$ pour tout entier naturel n.

4. On définit les matrices P, P' et B par $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a. Calculer le produit PP'
On admet que $P'BP = A$
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = P'B^nP$.

b. On admet que pour tout entier naturel n, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.

En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

5. a. Montrer que $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n ;

En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

b. Déterminer alors les limites des suites (u_n) et (v_n).

CORRECTION

1 . $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$

$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

$v_1 = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{0+2}{3} = \frac{2}{3}$

2. a. On donne des valeurs approchées à 10^{-3} près.

k	w	u	v
1	0	0.5	0.667
2	0.5	0.583	0.611

b. On affiche une valeur approchée à 10^{-3} près de u_n et v_n .

3. a. $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

$$AX_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_n + v_n}{2} \\ \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

b. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n : $X_n = A^n X_0$.

Initialisation

Pour n = 0 on convient que $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^0 I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X_0$.

La propriété est vérifiée pour n = 0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $X_n = A^n X_0$ et on doit démontrer que $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.

$X_{n+1} = AX^n = A(A^n X_0) = (AA^n)X_0 = A^{n+1} X_0$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que por tout entier naturel n : $X_n = A^n X_0$.

4. a. $PP' = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} + \frac{6}{10} & -\frac{4}{10} + \frac{6}{15} \\ -\frac{6}{10} + \frac{6}{10} & \frac{6}{10} + \frac{6}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$

On admet que : $P'BP = A$

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n : $A^n = P'B^n P$.

Initialisation

Pour n = 0 $A^0 = I$ et $B^0 = I$ et $P'B^0 P = P'IP = P'P = I = A^0$

La propriété est vérifiée pour n = 0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $A^n = P'B^nP$ et on doit démontrer que $A^{n+1} = P'B^{n+1}P$.

Or $A^{n+1} = A^n A = (P'B^nP)(P'BP) = P'B^n(PP')BP = P'B^nIBP$

$A^{n+1} = P'B^nBP = P'B^{n+1}P$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n :

$A^n = P'B^nP$

b. On admet que : $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$

$$A^n = P'B^nP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4}{10}+\frac{6}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{6}{10}-\frac{6}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{4}{10}-\frac{6}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{6}{10}+\frac{6}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5}-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{2}{5}-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$$

5. a. $X_n = A^nX_0$

$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5}-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{2}{5}-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5}-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

$u_n = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$ et $v_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

b. $-1 < \frac{1}{6} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$

Conclusion

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{3}{5}.$$