Exercice 1 — 5 points

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.
10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.
On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les événements suivants :

- événement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- événement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- événement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1 . Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.

2 .a. Quelle est la probabilité de l'événement $E \cap \overline{S}$?

b. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.

3 . On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1 . Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2 . Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.

3 . Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Partie C

A des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : « 88 % de notre thé est garanti sans trace de pesticides ».
Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation . A cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides.
On suppose que, dans le stock du grossiste, la proportion des boîtes sans trace de pesticides est bien égale à 0,88.

On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 boîtes, associe la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

1 . Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.

2 . L'inspecteur de la brigade de répression peut-il décider, au seuil de 95 %, que la publicité est mensongère ?

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Partie A

1 . L'énoncé nous donne :

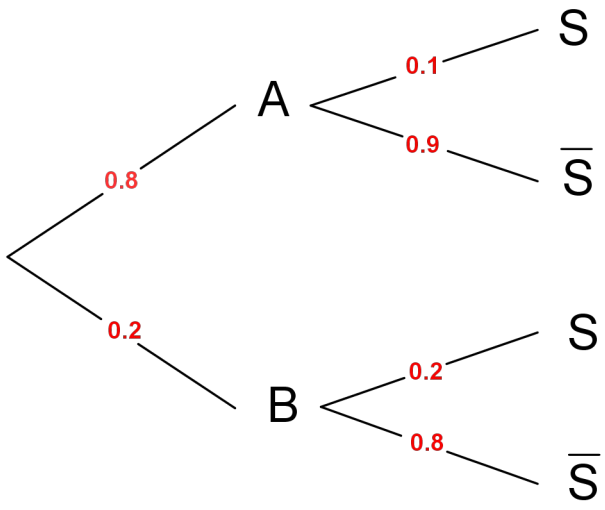
$P(A)=0,8$ $P(B)=0,2$ (remarque : $B=\bar{A}$)

$P_A(S)=0,1$ $P_B(S)=0,2$

Conséquence :

$P_A(\bar{S})=1-0,1=0,9$ et $P_B(\bar{S})=1-0,2=0,8$

On obtient l'arbre pondéré



2 .a. $P(S\cap\bar{B})=P(B)\times P_B(\bar{S})=0,2\times 0,8=0,16$

b. en utilisant la formule des probabilités totales ou en utilisant l'arbre pondéré on obtient :

$P(\bar{S})=P(A\cap\bar{S})+P(B\cap\bar{S})=P(A)\times P_A(\bar{S})+P(B)\times P_B(\bar{S})$

$P(\bar{S})=0,8\times 0,9+0,2\times 0,8=0,72+0,16=0,88$

$P(\bar{S}) = 0,88$

3 . On nous demande de calculer : $P_S(B)$

or $P_S(B)=\dfrac{P(B\cap S)}{P(S)}$

$P(B\cap S)=P(B)\times P_B(S)=0,2\times 0,2=0,04$

$P(S)=1-P(\bar{S})=1-0,88=0,12$

$P_S(B)=\dfrac{0,04}{0,12}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}\simeq 0,33$

$P_S(B)=0,33$

Partie B

1 . On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :

On choisit au hasard une boîte chez le grossiste

Succès « la boîte ne présente pas de trace de pesticides » : $\bar{S}$,

probabilité de succès $P(\bar{S})=0,88$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Echec « la boîte présente des traces de pesticides » : S
probabilité de l'échec : P(S) = 0,12.

On choisit 10 boîtes chez le grossiste, l'hypothèse de l'énoncé : le stock étant très important, nous permet d'affirmer que l'on effectue des épreuves « indépendantes ».
X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 10 épreuves ;
La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres n = 10 et p = 0,88.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant 10$

$P(X = k) = \binom{10}{k} 0,88^k \times 0,12^{10-k}$

2 . On nous demande calculer : $P(X=10)$

$P(X=10)=0,88^{10} \simeq 0,28$

$P(X=10) \simeq 0,28$

3 . On nous demande de calculer : $p(X \geqslant 8)$

or $P(X \geqslant 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$

$P(X \geqslant 8) = \binom{10}{8} 0,88^8 \times 0,12^2 + \binom{10}{9} 0,88^9 \times 0,12^1 + 0,88^{10}$

$P(X \geqslant 8)=45 \times 0,88^8 \times 0,12^2 + 10 \times 0,88^9 \times 0,12 + 0,88^{10}$

$P(X \geqslant 8) \simeq 0,23304 + 0,37977 + 0,27850$

$P(X \geqslant 8) \simeq 0,89131$

$P(X \geqslant 8) \simeq 0,89$

Partie C

1 . $n=50 \geqslant 30$ $np=50 \times 0,88=44 \geqslant 5$ $n(1-p)=50 \times 0,12=6 \geqslant 5$

donc l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95 % est :

$$I_{50}=\left[0,88-1,96 \times \frac{\sqrt{0,88 \times 0,12}}{\sqrt{50}} ; 0,88+1,96 \times \frac{\sqrt{0,88 \times 0,12}}{\sqrt{50}}\right]$$

$I_{50}=[0,78 ; 0,98]$

2 . Pour le prélèvement effectué par l'inspecteur, sur 50 boîtes il y a 50 – 12 = 38 boîtes ne présentant pas de traces de pesticides ; La fréquence est : $\frac{38}{50} = 0,76$

0,76 n'appartient pas à I_{50}

Le prélèvement effectué par l'inspecteur, lui permet d'affirmer qu'au seuil de 95 % il y a **publicité mensongère.**

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés