Exercice 2 6 points

On considère les fonctions f et g définies pour nombre réel x par :

$f(x)=\mathrm{e}^{x}$ et $g(x)=1-\mathrm{e}^{-x}$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement C_f et C_g, sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer au mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.
On note $\mathscr{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a et tangente à la courbe C_g au point B d'abscisse b.

1 .a. Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point A.

b. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_g au point B.

c. En déduire que b = - a.

2 . Démontrer que le nombre réel a est solution de l'équation :

$2(x-1)\mathrm{e}^{x}+1=0$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x)=2(x-1)e^{x}+1$

1 .a. Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.

2 .a. Démontrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

b. On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x)=0$ et β la solution positive de cette équation.
A l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

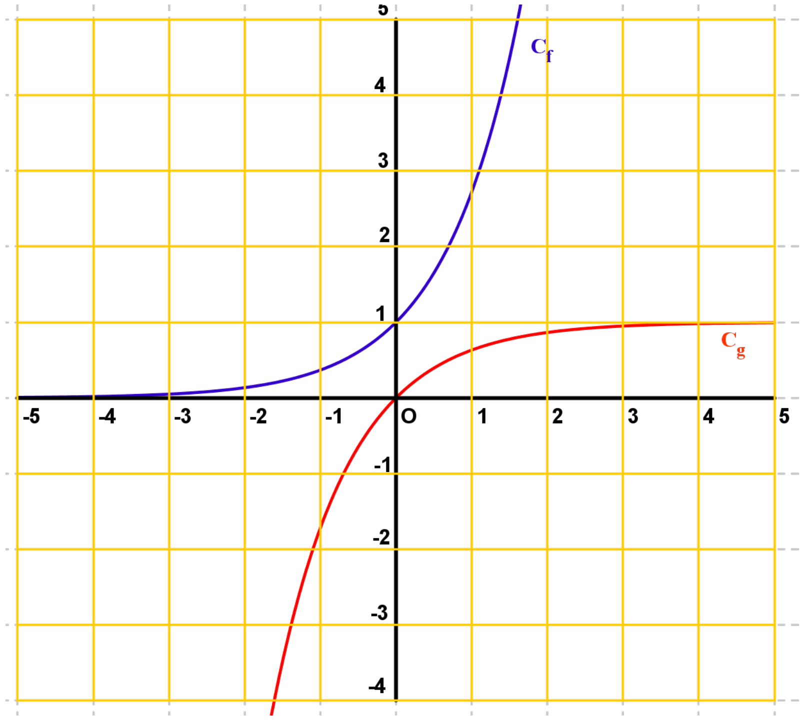
Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.
On note E le point de la courbe C_f d'abscisse α et F le point de la courbe C_g d'abscisse - α
(α est le nombre réel défini dans la partie C)

1 . Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe C_f au point E.

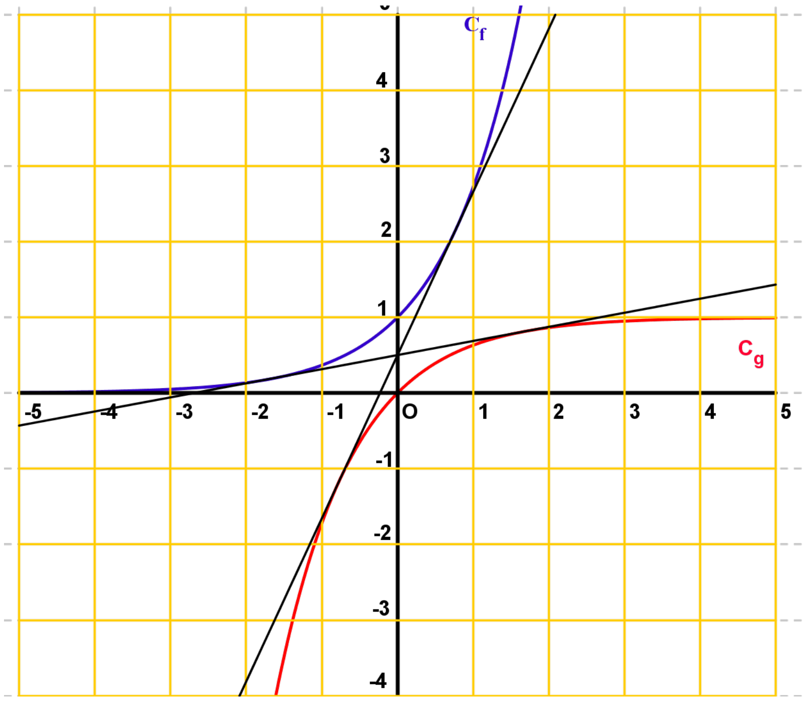
2 . Démontrer que (EF) est tangente à C_g au point F.

ANNEXE
(à rendre avec la copie)



CORRECTION

Partie A



Partie B

On admet que $\mathscr{D}$ est une tangente commune aux deux courbes. $\mathscr{D}$ est tangente en A d'abscisse a à C_f et au point B d'abscisse b à C_g.

1 .a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc C_f admet une tangente en tout point A d'abscisse a, on note T_A la tangente en A à C_f, le coefficient directeur de T_A est : $f'(a)$.

$f'(x)=e^x$ donc $f'(a)=e^a$

b. g est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc C_g admet une tangente en tout point B d'abscisse b, on note T'_B la tangente en B à C_g, le coefficient directeur de T'_B est : $g'(b)$

$g'(x)=e^{-x}$ car $(e^{-x})'=-e^{-x}$ donc $g'(b)=e^{-b}$

c. $\mathscr{D}$ est la tangente commune à C_f en A et à C_g en B si et seulement si $\mathscr{D} = T_A = T'_B$, en particulier les coefficients directeurs de T_A et de T'_B doivent être égaux : $e^a=e^{-b}$

or $e^a=e^{-b} \Leftrightarrow a=-b$.

2 . Equation réduite de T_A

$A(a;e^a) \quad f'(a)=e^a$

$y-e^a=e^a(x-a) \qquad y=e^a x-a e^a+e^a$

. Equation réduite de T'_B

$B(b;1-e^{-b}) \quad f'(b)=e^{-b}$

$y-1+e^{-b}=e^{-b}(x-b) \qquad y=e^{-b}x-b e^{-b}-e^{-b}+1$

or $e^{-b}=e^a$ et - b = a

$y=e^a x+a e^a-e^a+1$

. $T_A = T'_B$ si et seulement si leurs ordonnées à l'origine sont égales c'est à dire

$-a\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a = a\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^a + 1 \Leftrightarrow 0 = 2a\mathrm{e}^a - 2e^a + 1 \Leftrightarrow 2(a-1)\mathrm{e}^a + 1 = 0$

a est donc solution de l'équation d'inconnue x : $2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = 0$

Partie C

$\varphi(x) = 2(x-1)e^x + 1$

1 .a. $\varphi(x) = 2x\mathrm{e}^x - 2e^x + 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 1$

. $\varphi(x) = 2(x-1)e^x + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2(x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$

b. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\varphi'(x) = 2e^x + 2(x-1)e^x = 2\,xe^x$

Le signe de $\varphi'(x)$ est donc le signe de x.

c. Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de $\varphi(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$\varphi(0) = -1$

2 .a. φ est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que $0 \in [-1 ; 1[$ admet un unique antécédent α par f appartenant à $]-\infty ; 0]$ et α l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = 0$ appartenant à $]-\infty ; 0]$ or $\varphi(0) = -1$ donc $\alpha \in]-\infty ; 0[$ donc α est un nombre négatif.

. φ est continue et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 0 appartenant à l'intervalle $[-1 ; +\infty[$ admet un unique antécédent β par f appartenant à $[0 ; +\infty[$ et $\varphi(0) = -1$ donc β appartient à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, β est un nombre positif.

. Conclusion :

L'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions : α et β.

b. α est la solution négative.

En utilisant la calculatrice on obtient :

$\varphi(-1) \simeq -0{,}47$ et $\varphi(-2) \simeq 0{,}19$ donc $-2 < \alpha < -1$

Par dichotomie (ou par balayage) on obtient :
$\varphi(-1{,}68)\simeq 0{,}001$ et $\varphi(-1{,}67)\simeq -0{,}0015$ donc $-1{,}68 < \alpha < -1{,}67$
$\varphi(-1{,}679)\simeq 0{,}0004$ et $\varphi(-1{,}678)\simeq -0{,}0002$ donc $-1{,}679 < \alpha < -1{,}678$
donc -1,68 est une valeur arrondie au centième.

$$\alpha \simeq -1{,}68$$

. β est la solution positive.
$\varphi(0)=-1$ .et $\varphi(1)=1$ donc $0 < \beta < 1$
$\varphi(0{,}77)\simeq 0{,}005$ et $\varphi(0{,}76)\simeq -0{,}026$ donc $0{,}76 < \beta < 0{,}77$
$\varphi(0{,}768)\simeq -0{,}0001$ et $\varphi(0{,}769)\simeq 0{,}003$ donc $0{,}768 < \beta < 0{,}769$
donc 0,77 est la valeur approchée arrondie au centième de β.

$$\beta \simeq 0{,}77$$

Partie D

$E(\alpha, e^{\alpha})$ $F(-\alpha, 1-e^{\alpha})$ on a $\alpha \neq 0$

1 . La droite (EF) est tangente en à C_f si et seulement si le coefficient directeur de la droite (EF) est égal à e^{α}.
Soit m le coefficient directeur de (EF)

$$m=\frac{y_F-y_E}{x_F-x_E}=\frac{1-e^{\alpha}-e^{\alpha}}{-\alpha-\alpha}=\frac{1-2e^{\alpha}}{-2\alpha}=\frac{2e^{\alpha}-1}{2\alpha}$$

Or α est solution de l'équation : $2(x-1)e^{x}+1=0$
donc $2(\alpha-1)e^{\alpha}+1=0$
$2\alpha e^{\alpha}-2e^{\alpha}+1=0$
$2\alpha e^{\alpha}=2e^{\alpha}-1$

$$m=\frac{2\alpha e^{\alpha}}{2\alpha}=e^{\alpha}$$

<u>Conclusion :</u>
(EF) est tangente à C_f en E.

2 . Le coefficient directeur de la tangente en B à C_g est aussi e^{α} donc (EF) est aussi tangente à C_g en B.