Exercice 3 4 points

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans les questions 1 et 2, le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a=2+2i\ ,\ b=-\sqrt{3}+i\ ,\ c=1+i\sqrt{3}\ ,\ d=-1+i\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \text{et}\quad e=-1+(2+\sqrt{3})i\ .$$

1 . Affirmation 1 : Les points A, B et C sont alignés.

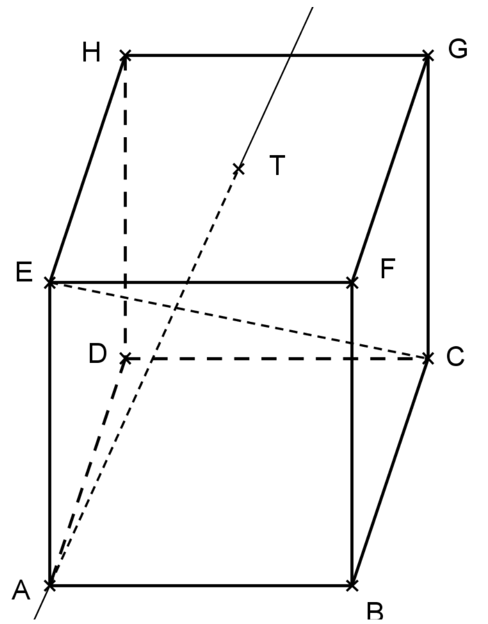
2 . Affirmation 2 : Les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.

3 . Dans cette question, l'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $I(1,0,0)$; $J(0,1,0)$ et $K(0,0,1)$.

Affirmation 3 : la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x=2-t \\ y=6-2t \\ z=-2+t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

coupe le plan (IJK) au point $E\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$.

4 . Dans le cube ABCDEFGH, le point T est le milieu du segment [HF]



Affirmation 4 : Les droites (AT) et (EC) sont orthogonales.

CORRECTION

1 . **Affirmation 1 :** **VRAIE**

$\overrightarrow{AB}$ ($-\sqrt{3}$ - 2- i) $\overrightarrow{AC}$ (-1+($\sqrt{3}$ -2))

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}-2\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}-2\end{pmatrix}$

On considère la condition analytique de colinéarité de deux vecteurs.

$xy'-x'y=(-\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}-2)1(-1)\times(-1)=-3+4-1=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc les points A ; B et C sont alignés.

2 . **Affirmation 2 :** **FAUSSE**

$\overrightarrow{EB}$ $(-\sqrt{3}+1+i(1-2-\sqrt{3}))$

$EB^2=(-\sqrt{3}+1)^2+(-1-\sqrt{3})^2=3+1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}=8$

$\overrightarrow{EC}$ (2+2i)

$EC^2=2^2+2^2=8$

$\overrightarrow{ED}$ $\left(0+i\left(-2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$ED^2=\left(-2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=4+\frac{9}{4}+2\sqrt{3} \neq 8$

Donc B;C et D n'appartiennent pas à un même cercle de centre E.

3 . **Affirmation 3 :** **VRAIE**

On détermine une équation cartésienne du plan (IJK). Pour cela on calcule les coordonnées d'un vecteur normal non nul à (IJK).

$\vec{N}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\vec{N}$ est normal à (IJK) si et seulement si $\vec{N}\cdot\overrightarrow{IJ}=0$ et $\vec{N}\cdot\overrightarrow{IK}=0$

c'est à dire $\begin{cases}-a+b=0\\-a+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b\\a=c\end{cases}$

on choisit a = 1 donc $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$M(x;y;z) \in (IJK) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\cdot\vec{N}=0 \Leftrightarrow (x-1)\times1+y\times1+z\times1=0$

$\Leftrightarrow x+y+z-1=0$

On résout le système

$$\begin{cases}x+y+z-1=0\\x=2-t\\y=6-2t\\z=-2+t\end{cases}$$

On obtient : $2-t+6-2t-2+t-1=0 \Leftrightarrow -2t+5=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$

$x=2-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}$ et $y=6-5=1$ et $z=-2+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$

Le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et du plan (IJK) est le point $E\left(-\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$.

4 . <u>Affirmation 4 :</u> $\boxed{\textbf{VRAIE}}$

On considère le repère orthonormé de l'espace : (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$)

$A(0;0;0)$ $C(1;1;0)$ $E(0;0;1)$ $H(0;1;1)$ $F(1;0;1)$ $T\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$

$\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times1+1\times(-1)=0$

Donc les droites (AT) et (EC) sont orthogonales.