Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=\frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

On admet que tout les termes de cette suite sont définies et strictement positifs.

1 . Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

2 .a. Etablir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$$

on admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1 . On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n
	Affecter à u la valeur $\frac{1+0,5u}{0,5+u}$
	Afficher u
	FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour n = 3. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2 . Pour n = 12, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1.0083	0.9973	1.0009	0.9997	1.0001	0.99997	1.00001	0.999996	1.000001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3 . On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n par : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4 .a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel a, on a : $u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$;

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

CORRECTION

Partie A

$u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n $u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$

1 . On veut démontrer ,en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n on a : $u_n - 1 > 0$

. Initialisation :
$u_0 = 2$ et $2 - 1 = 1 > 0$
La propriété est vérifiée pour n = 0.

. Hérédité :
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : $u_n - 1 > 0$ et on doit démontrer que : $u_{n+1} - 1 > 0$.
Or $u_{n+1} - 1 = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} - 1 = \dfrac{1+3u_n-3-u_n}{3+u_n} = \dfrac{-2+2u_n}{3+u_n} = 2\times\dfrac{u_n-1}{3+u_n}$
On a : $u_n - 1 > 0$ (hypothèse de récurrence) et $3 + u_n > 0$ (tous les termes de la suite sont strictement positifs) donc $u_{n+1} - 1 > 0$.

. Conclusion :
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que tout entier naturel n : $u_n - 1 > 0$.

2 .a. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \dfrac{1+3u_n-3u_n-u_n^2}{3+u_n} = \dfrac{1-u_n^2}{3+u_n} = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$

b. Pour tout entier naturel n : $1 + u_n > 0$ et $3 + u_n > 0$ et $1 - u_n < 0$
donc $u_{n+1} - u_n < 0$.
La suite (u_n) est strictement décroissante.
(u_n) est décroissante et minorée par 1.
(u_n) est donc une suite convergente.

Partie B

1 . En utilisant la calculatrice, on complète le tableau.

i	1	2	3
u	0.800	1.077	0.976

2 . On remarque que (u_n) n'est pas une suite monotone.

Conjecture : **La suite (u_n) converge vers 1.**

3 .a. Pour tout entier naturel n, $u_n + 1 > 0$ donc non nul
$v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}$

$$u_{n+1}-1=\frac{1+0{,}5\,u_n}{0{,}5+u_n}-1=\frac{1+0{,}5\,u_n-0{,}5-u_n}{0{,}5+u_n}=\frac{0{,}5-0{,}5\,u_n}{0{,}5+u_n}=\frac{-0{,}5(u_n-1)}{0{,}5+u_n}$$

$$u_{n+1}+1=\frac{1+0{,}5\,u_n}{0{,}5+u_n}+1=\frac{1+0{,}5\,u_n+0{,}5+u_n}{0{,}5+u_n}=\frac{1{,}5+1{,}5\,u_n}{0{,}5+u_n}=\frac{1{,}5(u_n+1)}{0{,}5+u_n}$$

donc $v_{n+1}=\dfrac{-0{,}5(u_n-1)}{1{,}5(u_n+1)}=-\dfrac{1}{3}v_n$

(v_n) est une suite géométrique de raison q = $-\dfrac{1}{3}$.

b. $v_0=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$

pour tout entier naturel n $v_n=v_0\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ donc $v_n=\dfrac{1}{3}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

4 .a. Pour tout entier naturel n on a :

$$v_n-1=\frac{u_n-1}{u_n+1}-1=\frac{u_n-1-u_n-1}{u_n+1}=\frac{-2}{u_n+1}\neq 0$$

b. Pour tout entier naturel n :

$$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$$
$$(u_n+1)v_n=u_n-1$$
$$u_n v_n+v_n=u_n-1$$
$$v_n+1=u_n-u_n v_n=u_n(1-v_n)$$

et $u_n=\dfrac{1+v_n}{1-v_n}$

c. $-1<-\dfrac{1}{3}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$

<u>Conséquence :</u>

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1+0}{1-0}=1$$