Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie.
Ainsi , le rectangle initial OEFG est transformé en un rectangle OE'F'G', appelé image de OEFG.

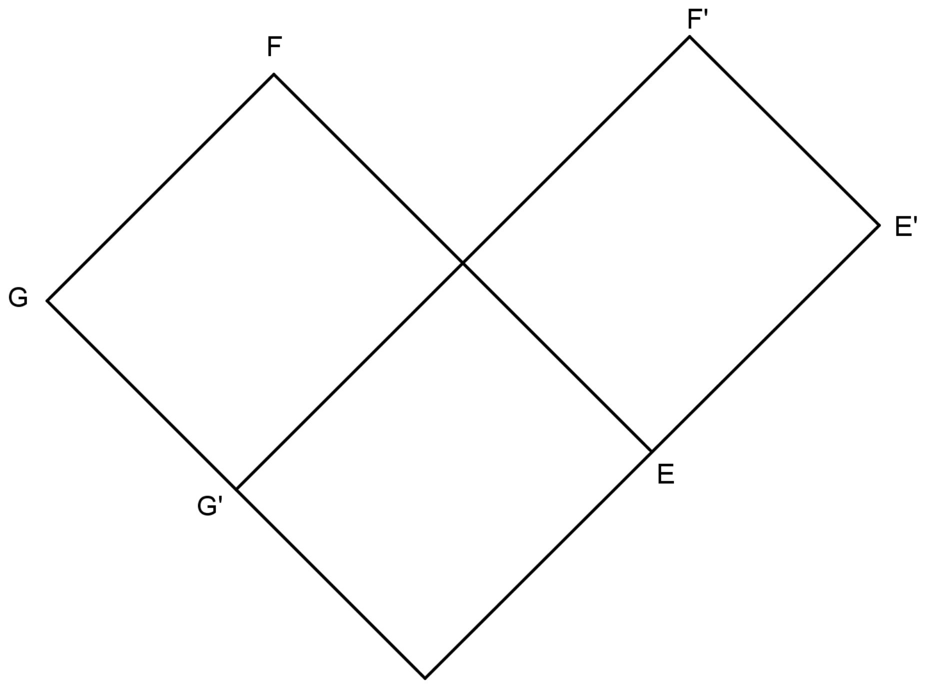


Figure 1

L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Les points E,F et G ont pour coordonnées respectives $(2;2)$, $(-1;5)$ et $(-3;3)$.

La transformation du logiciel associe à tout point $M(x;y)$ du plan le point $M'(x';y')$

image du point tel que : $\begin{cases} x'=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}y \\ y'=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}y \end{cases}$

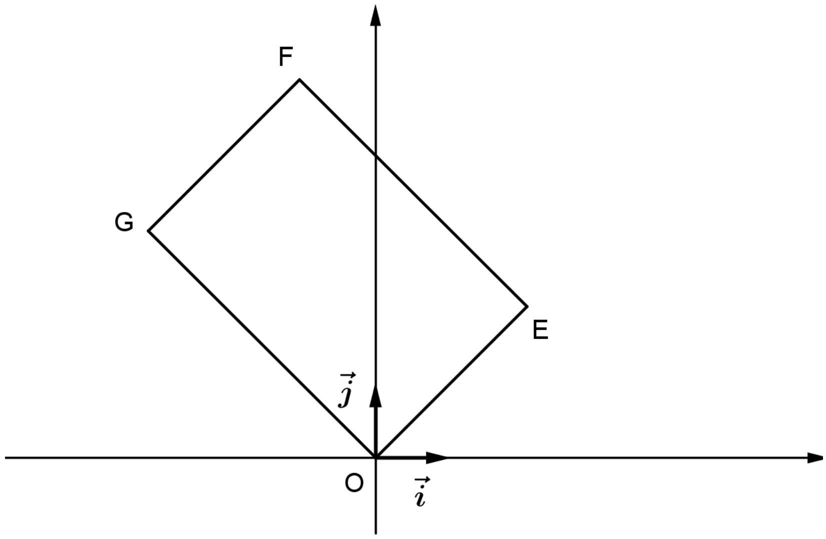


Figure 2

1 . Calculer les coordonnées des points E',F' et G', images des points E,F et G par cette transformation.

2 . Comparer les longueurs OE et OE' d'une part, OG et OG' d'autre part.
Donner la matrice carrée d'ordre2, notée A telle que : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Partie B

Dans cette partie, on étudie les coordonnés des images successives du sommet F du rectangle OEFG lorsque l'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1 . On considère l'algorithme suivant destiné à affiché les coordonnées de ces images successives.
Une erreur a été commise.
Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.

Entrée	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à x la valeur -1
	Affecter à y la valeur 5
Traitement	POUR i allant de 1 à N
	Affecter à a la valeur $\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}y$
	Affecter à b la valeur $\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}y$
	Affecter à x la valeur a
	Affecter à y la valeur b
	FIN POUR
Sortie	Afficher x, afficher y

2 . On a obtenu le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	10	15
x	2.5	7.25	15.625	31.8125	63.9063	2047.9971	65535.9999
y	5.5	8.75	16.375	32.1875	64.0938	2048.0029	65535.9999

Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F.

Partie C

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle OEFG. On définit la suite des points $E_n(x_n, y_n)$ du plan par $E_0 = E$ et la relation de récurrence : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ où $(x_{n+1} ; y_{n+1})$ est le couple de coordonnées du point E_{n+1}.
Ainsi $x_0 = 2$ et $y_0 = 2$.

1 . On admet que,pour tout entier n ⩾ 1, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme :
$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ⩾ 1, on a :
$$\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad \beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

2 .a. Démontrer que pour tout entier naturel n, le point E_n est situé sur la droite d'équation y = x.
On pourra utiliser que, pour tout entier naturel n, les coordonnées x_n et y_n du point E_n vérifient : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b. Démontrer que la longueur OE_n tend vers ∞ quand n tend vers $+\infty$.

CORRECTION

Partie A

1 . $E(2;2)$

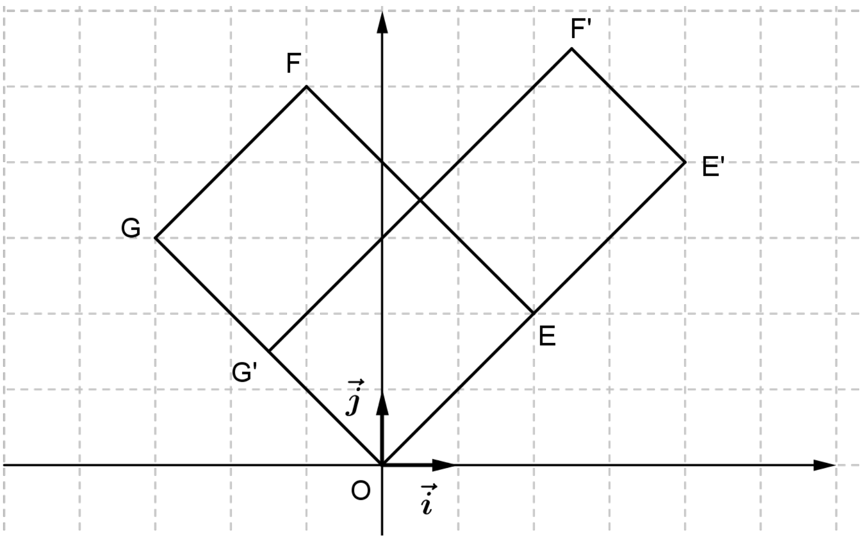
$$\begin{cases} x'=\frac{5}{4}\times 2+\frac{3}{4}\times 2=4 \\ y'=\frac{3}{4}\times 2+\frac{5}{4}\times 2=4 \end{cases} \qquad E'(4;4)$$

$F(-1;5)$

$$\begin{cases} x'=\frac{5}{4}\times(-1)+\frac{3}{4}\times 5=\frac{10}{4}=2{,}5 \\ y'=\frac{3}{4}\times(-1)+\frac{5}{4}\times 5=\frac{22}{4}=5{,}5 \end{cases} \qquad F'(2{,}5;5{,}5)$$

$G(-3;3)$

$$\begin{cases} x'=\frac{5}{4}\times(-3)+\frac{3}{4}\times 3=-\frac{6}{4}=-1{,}5 \\ y'=\frac{3}{4}\times(-3)+\frac{5}{4}\times 3=\frac{6}{4}=1{,}5 \end{cases} \qquad G'(-1{,}5;1{,}5)$$



Remarque

On peut vérifier que OE'F'G' est un rectangle

2 . $E(2;2)$ $\quad OE^2=4+4=8 \quad OE=2\sqrt{2}$

$E'(4;4)$ $\quad OE'^2=16+16=32 \quad OE'=4\sqrt{2}$

donc $\quad OE'=2\,OE$

$G(-3;3)$ $\quad OG^2=9+9=18 \quad OG=3\sqrt{2}$

$G'\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ $\quad OG'^2=\frac{9}{4}+\frac{9}{4}=\frac{18}{4} \quad OG'=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

donc $\quad OG'=\frac{1}{2}OG$

Remarque

Les aires des rectangles OEFG et OE'F'G' sont égales.

On a $\begin{cases} x'=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}y \\ y'=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}y \end{cases}$ en utilisant la définition du produit d'une matrice carrée

par une matrice colonne on obtient : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donc A = $\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

Partie B

1 . Il suffit de changer l'ordre des deux dernières instructions.
Afficher x, Afficher y
FIN POUR

2 . Si on note $F_1(x_1;y_1)$ ………. $F_n(x_n;y_n)$
Les suites (x_n) et (y_n) divergent vers $+\infty$, les valeurs de x_n et y_n pour n « grand » sont voisines donc F_n est « voisin » de la droite d'équation y = x.

Partie C

$E_0=E(2;2)$
Pour tout entier naturel n : $E_n(x_n;y_n)$ et $E_{n+1}(x_{n+1};y_{n+1})$

$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ A = $\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$

1 . On admet pour tout entier naturel non nul n que : $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, on a : $\alpha_n=2^{n-1}+\frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n=2^{n-1}-\frac{1}{2^{n+1}}$.

. <u>Initialisation</u>

Pour n = 1 $A^1 = A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ donc $\alpha_1=\frac{5}{4}$ et $\beta_1=\frac{3}{4}$

$2^{1-1}+\frac{1}{2^{1+1}}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}=\alpha_1$ et $2^{1-1}-\frac{1}{2^{1+1}}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\beta_1$
La propriété est vérifiée pour n = 1.

. <u>Hérédité</u>
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : $\alpha_n=2^{n-1}+\frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n=2^{n-1}-\frac{1}{2^{n+1}}$ et on doit démontrer que :

$\alpha_{n+1}=2^n+\frac{1}{2^{n+2}}$ et $\beta_{n+1}=2^n-\frac{1}{2^{n+2}}$.

Or $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$ et $A^{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ \beta_{n+1} & \alpha_{n+1} \end{pmatrix}$

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ \beta_{n+1} & \alpha_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \times A = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

en effectuant le produit matriciel $A^n \times A$ on obtient :

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \frac{5}{4}\alpha_n + \frac{3}{4}\beta_n \\ \beta_{n+1} = \frac{3}{4}\alpha_n + \frac{5}{4}\beta_n \end{cases} \quad \text{donc}$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{5}{4}\left(2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \frac{3}{4}\left(2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right) \times 2^{n-1} + \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{8}{4} \times 2^{n-1} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\alpha_{n+1} = 2^n + \frac{1}{2^{n+2}}$$

$$\beta_{n+1} = \frac{5}{4}\left(2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \frac{3}{4}\left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right) 2^{n-1} + \left(-\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{8}{4} \times 2^{n-1} - \frac{2}{4} \times \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\beta_{n+1} = 2^n - \frac{1}{2^{n+2}}$$

. Conclusion

le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n on a :

$$\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad \beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

2 .a. Pour tout entier naturel n $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (on convient que : $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) ;

En effectuant le produit matriciel, on obtient :

$$x_n = 2\alpha_n + 2\beta_n = 2 \times \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) + 2 \times \left(2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2^n + \frac{1}{2^n} + 2^n - \frac{1}{2^n} = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

$$y_n = 2\beta_n + 2\alpha_n = 2^{n+1}$$

$x_n = y_n = 2^{n+1}$ donc le point $E_n(x_n ; y_n)$ appartient à la droite d'équation $y = x$.

b. Le repère est orthonormé

$\overrightarrow{OE_n} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OE_n} \begin{pmatrix} 2^{n \times 1} \\ 2^{n+1} \end{pmatrix}$

$$OE_n^2 = (2^{n+1})^2 + (2^{n+1})^2 = 2 \times (2^{n+1})^2$$

$$OE_n = \sqrt{2} \times 2^{n+1}$$

$2 > 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^{n+1} = +\infty$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} OE_n = +\infty$.