Exercice 1 — 6 points

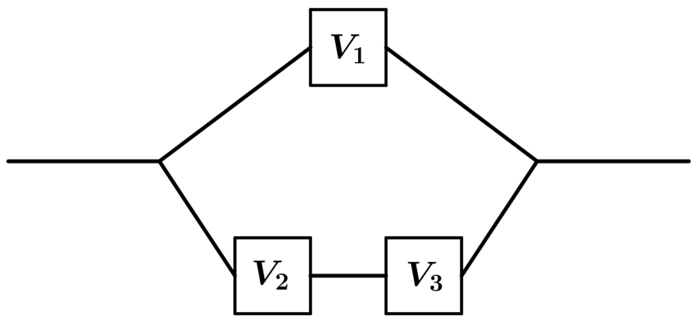
Un industriel fabrique des vannes électroniques destinées à des circuits hydrauliques.
Les quatre parties A,B,C et D sont indépendantes.

Partie A
La durée de vie d'une vanne, exprimée en heures, est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0002$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'une vanne ?

2. Calculer la probabilité, à 0,001 près, que la durée d'une vanne soit supérieure à 6000 heures.

Partie B
Avec trois vannes identiques V_1, V_2 et V_3, on fabrique le circuit hydrauliques ci-dessous.

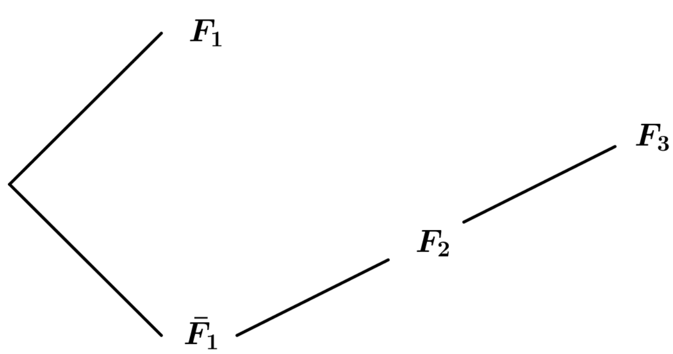


Le circuit est en état de marche si V_1 est en état de marche ou si V_1 et V_2 le sont simultanément.

On assimile à une expérience aléatoire le fait que chaque vanne est ou n'est pas en état de marche après 6000 heures.On note :
- F_1 l'événement : « la vanne V_1 est en état de marche après 6000 heures ».
- F_2 l'événement : « la vanne V_2 est en état de marche après 6000 heures ».
- F_3 l'événement : « la vanne V_3 est en état de marche après 6000 heures ».
- E l'événement : « le circuit est en état de marche après 6000 heures ».

On admet que les événements F_1, F_2 et F_3 sont deux à deux indépendants et ont chacun une probabilité égale à 0,3.

1. L'arbre probabiliste ci-dessous une partie de la situation.



Reproduire cet arbre et placer les probabilités sur les branches.

2. Démontrer que $P(E) = 0,363$.

3. Sachant que le circuit est en état de marche après 6000 heures, calculer la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche à ce moment là. Arrondir au millième.

Partie C

L'industriel affirme que seulement 2 % des vannes qu'il fabrique sont défectueuses ; On suppose que cette affirmation est vraie, et l'on note F la variable aléatoire égale à la fréquence de vannes défectueuses dans un échantillon de 400 vannes prises au hasard dans la production totale.

1. Déterminer l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable F.

2. On choisit 400 vannes au hasard dans la production. On assimile ce choix à un tirage aléatoire de 400vannes, avec remise, dans la production.
Parmi ces 400 vannes, 10 sont défectueuses.
Au vu de ce résultat peut-on remettre en cause, au seuil de 95 % l'affirmation de l'industriel ?

Partie D

Dans cette partie, les probabilités calculées seront arrondies au millième.
L'industriel commercialise ses vannes auprès de nombreux clients. La demande mensuelle est une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 800$ et d'écart type $\sigma = 40$.

1. Déterminer $P(760 \leqslant D \leqslant 840)$

2. Déterminer $P(D \leqslant 880)$.

3. L'industriel pense que s'il constitue un stock mensuel de 880 vannes, il n'aura pas plus de 1 % de chance d'être en rupture de stock. A-t-il raison ?

<u>CORRECTION</u>

Partie A

1. T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0002$ donc la loi de densité de probabilité de T est la fonction f définie sur [0;+∞[par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ et $P(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-l\lambda x}\,dx$.

La durée de vie moyenne d'une vanne est égale à l'espérance mathématique de la loi exponentielle c'est à dire $E(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.

La durée de vie moyenne d'une vanne est $\frac{1}{0{,}0002}$ = **5000 (heures)**

2. $P(T > 6000) = 1 - \int_0^{6000} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

F définie sur [0;+∞[par $F(t)=-e^{-\lambda t}$ est une primitive de f sur [0;+∞[.

$P(T > 6000) = 1 - (F(6000) - F(0)) = 1-(-e^{-6000\lambda}+e^{0})=1+e^{-6000\lambda}-1=e^{-6000\lambda}$

$P(T > 6000) = e^{-1{,}2} \simeq$ **0,301**

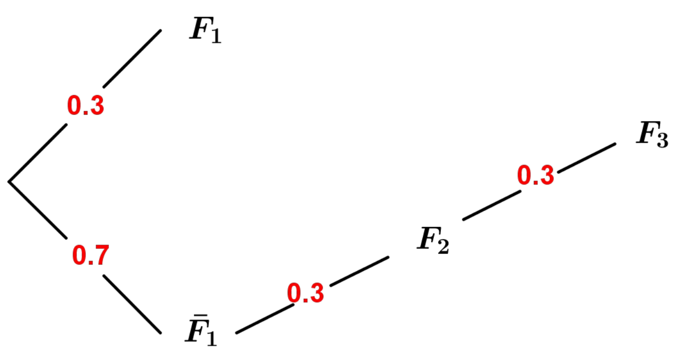
Partie B

1. $P(F_1)=0{,}3$ donc $P(\bar{F}_1)=1-0{,}3=0{,}7$.

Les événements F_1 et F_2 sont indépendants donc les événements $\bar{F}_1$ et F_2 sont indépendants et $P_{\bar{F}_1}(F_2)=P(F_2)=0{,}3$.

Les événements F_2 et F_3 sont indépendants donc $P_{F_2}(F_3)=P(F_3)=0{,}3$.

On obtient l'arbre pondéré suivant :



2 . $1^{ère}$ <u>méthode</u>

$$E=F_1\cup(F_2\cap F_3)$$

$P(E)=P(F_1)+P(F_2\cap F_3)-P(F_1\cap F_2\cap F_3) = P(F_1)+P(F_2)\times P(F_3)-P(F_1)\times P(F_2)\times P(F_3)$

$P(E)=0{,}3-0{,}3\times 0{,}3+0{,}3\times 0{,}3\times 0{,}3=0{,}3+0{,}09-0{,}027=0{,}363$

$P(E)=0{,}363$

$2^{ème}$ <u>méthode</u>

L'arbre pondéré construit , donne les deux seules branches constituant l'événement E.

$P(E)=0{,}3+0{,}7\times 0{,}3\times 0{,}3=0{,}3+0{,}063=0{,}363$

$P(E)=0{,}363$

3. On nous demande de calculer : $P_E(F_1)$.

$$P_E(F_1)=\frac{P(E\cap F_1)}{P(E)}=\frac{0,3}{0,363} \simeq \mathbf{0,826}$$

Partie C

1. On a p = 0,02 et n = 400

on vérifie : $n \geqslant 30$, $np = 8 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 0,98\times 400 = 392 \geqslant 5$;

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$I_n=\left[p-1,96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+1,96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

$$p-1,96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}=0,02-1,96\times\frac{0,14}{20}=0,00628$$

$$p+1,96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}=0,02+1,96\times\frac{0,14}{20}=0,03372$$

$$I_{400}=[0,00628\,;0,03372]$$

La fréquence observée sur cet échantillon est : $f=\frac{10}{400}=$ **0,025**

2. **0,025 appartient à l'intervalle I_{400} . On ne peut remettre en cause, au seuil de 95 %, l'affirmation de l'industriel.**

Partie D

1. En utilisant la calculatrice : $P(760 \leqslant D \leqslant 840) \simeq$ **0,683**

<u>Remarque :</u>

$[760\,;840]=[800-40\,;800+40]=[\mu-\sigma\,;\mu+\sigma]$

et le résultat est à connaître.

2. $P(720 \leqslant D \leqslant 880) \simeq$ **0,9544**

<u>Remarque</u>

$[720\,;880]=[800-80\,;800+80]=[\mu-2\sigma\,;\mu+2\sigma]$

$P(D \leqslant 880) = P(D \leqslant 800) + P(800 \leqslant D \leqslant 880) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ x $P(720 \leqslant D \leqslant 880)$

$P(D \leqslant 880) \simeq 0,5 + 0,4772$

$P(D \leqslant 880) \simeq 0,977$

$P(D > 880) = 1 - P(D \leqslant 880) \simeq 0,023$

Il y a une probabilité de 2,3 % pour que la vente mensuelle soit supérieure à 880.

Donc l'industriel a tord de penser qu'il n'aura pas plus de 1 % de chance d'être en rupture de stock.