Exercice 2 4 points

Les quatre questions sont indépendantes.
Pour chaque question , une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère.
- Les points $A(12;0;0)$, $B(0;-15;0)$, $C(0;0;20)$, $D(2;7;-6)$, $E(7;3;-3)$
- Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $2x+y-2z-5=0$

Affirmation 1

Une équation cartésienne du plan parallèle à $\mathscr{P}$ et passant par le point A est :
$2x+y+2z-24=0$

Affirmation 2

Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\begin{cases} x=9-3t \\ y=0 \\ z=5+5t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

Affirmation 3

La droite (DE) et le plan $\mathscr{P}$ ont au moins un point commun.

Affirmation 4

La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

CORRECTION

Affirmation 1 $\boxed{\text{FAUSSE}}$

Soit $\mathscr{P}'$ le plan d'équation : $2x+y+2z-24=0$ $\vec{N'}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}'$.

$\mathscr{P}$: $2x+y-2z-5=0$ $\vec{N}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

Les vecteurs $\vec{N}$ et $\vec{N'}$ ne sont pas colinéaires donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles.

Affirmation 2 $\boxed{\text{VRAIE}}$

$\mathscr{D}$ est la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases}x=9-3t\\ y=0\\ z=5+5t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

$\vec{V}\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}$ Est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-12\\0\\20\end{pmatrix}$ donc $\vec{AC}=4\vec{V}$

et les droites (AC) et $\mathscr{D}$ sont parallèles.

$A(12;0;0)$ $\begin{cases}12=9-3t\\ 0=0\\ 0=5\times5t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-1\\ t=-1\end{cases} \Leftrightarrow \{t=-1$ Donc le point A appartient à $\mathscr{D}$

et les droites $\mathscr{D}$ et (AC) sont confondues.

<u>Conclusion</u>

La représentation paramétrique donnée est bien une représentation paramétrique de (AC).

Affirmation 3 $\boxed{\text{FAUSSE}}$

$\vec{N}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$ et $\vec{DE}$ est un vecteur directeur de (DE).

$\vec{N}\cdot\vec{DE}=2\times5+1\times(-4)+(-2)\times3=10-4-6=0$.

Les vecteurs $\vec{N}$ et $\vec{DE}$ sont orthogonaux donc (DE) est une droite parallèle à $\mathscr{P}$.

$E(7;3;-3)$ $\mathscr{P}$: $2x+y-2z-5=0$

$2\times7+3-2\times(-3)-5=14+3+6-5=18 \neq 0$ donc le point E n'appartient pas à $\mathscr{P}$

et la droite (DE) est strictement parallèle à $\mathscr{P}$.

Le plan $\mathscr{P}$ et la la droite (DE) n'ont aucun point commun.

Affirmation 4 $\boxed{\text{VRAIE}}$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-12\\-15\\0\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-12\\0\\20\end{pmatrix}$

<u>Remarque</u>

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.

La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC) si et seulement si $\vec{AB}\cdot\vec{DE}=0$ et $\vec{AC}\cdot\vec{DE}=0$.

$\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = -12\times 5+(-15)\times(-4)+0\times 3=-60+60=0$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} = -12\times 5+0\times(-4)+20\times 3=-60+60=0$