Exercice 3 5 points

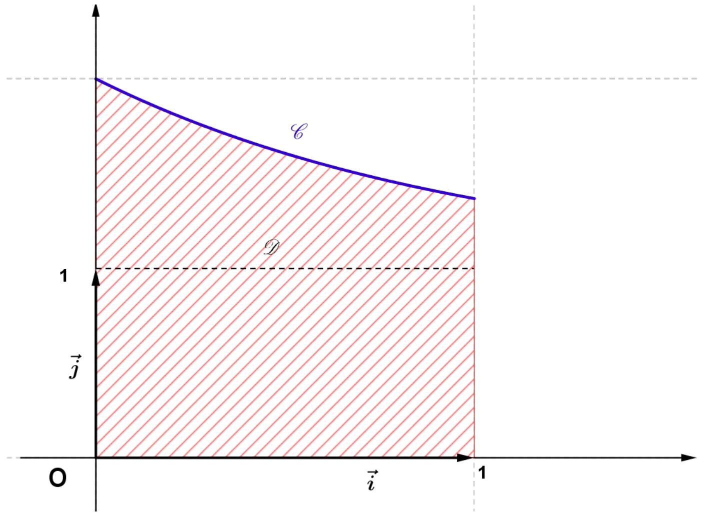
On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle [0 ;1] par :

$g(x)=1+e^{-x}$.

On admet que , pour tout réel x de l'intervalle [0;1], g(x) > 0.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal et $\mathscr{D}$ le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, d'autre part entre les droites d'équation x = 0 et x = 1.

La courbe $\mathscr{C}$ et le domaine $\mathscr{D}$ sont représentés ci-dessous.

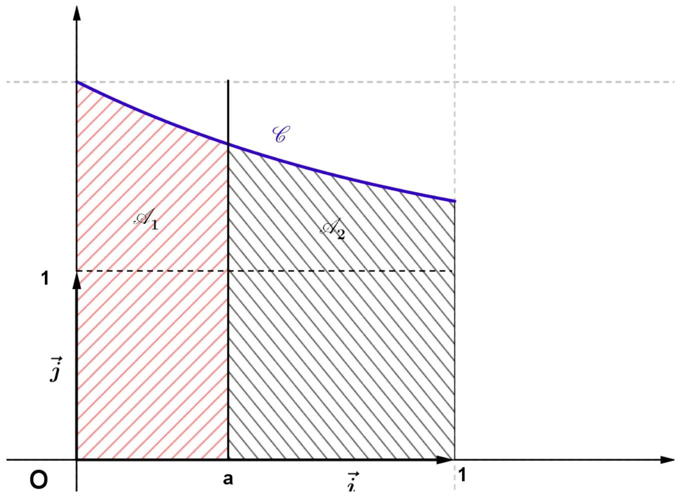


Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leqslant a \leqslant 1$. On note $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox), les droites d'équation x = 0 et x = a, puis $\mathscr{A}_2$ celle du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, (Ox) et les droites d'équation x = a et x = 1.

$\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont exprimés en unités d'aire.



1. a. Démontrer que $\mathscr{A}_1 = a - e^{-a} + 1$.

b. Exprimer $\mathscr{A}_2$ en fonction de a.

2. Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle [0;1] par :

$$f(x)=2x-2e^{-x}+\frac{1}{e}$$

a. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0;1]. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.

b. Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle [0;1], en un réel α. Donner la valeur de α arrondie au centième.

3. En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel a pour lequel les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales.

Partie B

Soit b un réel positif.
Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation y = b. On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

1. Justifier l'inégalité $b < 1+\frac{1}{e}$; on pourra utiliser un argument graphique.

2. Déterminer la valeur exacte du réel b.

CORRECTION

Partie A

1. a. $0 \leqslant a \leqslant 1$

g est continue et positive sur [0;1] donc sur [0;a], donc l'aire $\mathscr{A}_1$, en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 0 et x = a est égale à $\int_0^a g(x)\,dx$.

$g(x)=1+e^{-x}$ $\qquad$ $G(x)=x-e^{-x}$

G est une primitive de g sur [0;1]

$\mathscr{A}_1 = \int_0^a (1+e^{-x})\,dx = G(a) - G(o) = a-e^{-a}+1$

$\mathscr{A}_1 = 1+a-e^{-a}$ U.A.

b. g est continue et positive sur [a;1], donc l'aire $\mathscr{A}_2$, en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = a et x= 1 est égale à $\int_a^1 g(x)\,dx$.

$\mathscr{A}_2 = \int_a^1 (1+e^{-x})\,dx = G(1) - G(a) = 1-e^{-1}-a+e^{-a}$

$\mathscr{A}_2 = 1-a+e^{-a}-\frac{1}{e}$ U.A.

2. $x \in [0;1]$ $\qquad$ $f(x)=2x-2e^{-x}+\frac{1}{e}$

a. f est dérivable sur [0;1]

$f'(x)=2+2e^{-x}>0$ car pour tout réel x, $e^{-x}>0$

f est strictement croissante sur [0;1]

$f(0)=-2+\frac{1}{e}$ et $f(1)=2-\frac{1}{e}$

Tableau de variation de f

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-2+\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$2-\frac{1}{e}$

b. f est continue est strictement croissante sur [0;1]

$f(0)=-2+\frac{1}{e}<0$ et $f(1)=2-\frac{1}{e}>0$

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que $0 \in [f(0);f(1)]$ admet un unique antécédent α appartenant à l'intervalle [0;1] pat f.

En utilisant la calculatrice par dichotomie ou par balayage on obtient : 0,452 < α < 0,453 donc la valeur approchée arrondie au centième est : **0,45.**

3. $a \in [0;1]$

$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \iff a-e^{-a}+1=e^{-a}-a-\frac{1}{e}+1 \iff 2a-2e^{-a}+\frac{1}{e}=0$

donc a est l'unique solution de l'équation $f(x)=0$ (appartenant à [0;1])

et a = $\alpha \simeq$ **0,45**

Partie B

1. Le domaine $\mathscr{D}$ est contenu dans un rectangle dont les dimensions des côté sont 1 et 2
et l'aire de $\mathscr{D}$, en unités d'aire, est strictement inférieure à 2.
Si on partage $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation y = b alors l'un des deux domaines est un rectangle d'aire b, en unités d'aire, donc b < 1,
conséquence : $b < 1 + \frac{1}{e}$

2. L'aire de $\mathscr{D}$ est : $\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = 2 - \frac{1}{e}$

donc $2b = 2 - \frac{1}{e}$ et $b = 1 - \frac{1}{2e}$.